$\boxed{\text{Application du produit scalaire}}$

Correction des exercices bilan page 301

• **Bilan** $\boxed{1}$

Pour répondre à ce problème, nous devons déterminer les coordonnées du point E. Comme E est intersection de deux droites, on peut déterminer les équations cartésiennes de ces deux droites. Ensuite, il restera à résoudre le système de deux équations à deux inconnues obtenu.

1) Equations cartésiennes des droites dont E est l'intersection :

a) *Droite passant par le point B que l'on nommera (d_1) :*

Cette droite est perpendiculaire à la droite rouge et passe par B.
Comme nous connaissons une équation cartésienne de la droite rouge, nous pouvons en obtenir un vecteur normal. Soit $\vec{n_1}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$: c'est un vecteur normal à la droite rouge et donc un vecteur directeur de (d_1). Une équation cartésienne de (d_1) est donc $x + 2y + c = 0$. Reste à déterminer la valeur de c. Pour cela, on utilise le fait que (d_1) passe par $B(2\,;\,3)$: $2+2\times3+c = 0$ soit $c = -8$. Finalement $(d_1) : x + 2y - 8 = 0$.

b) *Droite passant par le point C que l'on nommera (d_2) :*

La même démarche que précédemment nous amène à : $(d_2) : x - y - 5 = 0$.

2) Résolution du système :

Les coordonnées de E sont solution du système :

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 3 = 0 & \text{« 1ère équation } - \text{ 2ème équation »} \\ x - y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

On peut conclure que les coordonnées du point E sont $E(6\,;\,1)$ et donc que ses coordonnées sont entières.

• **Bilan** $\boxed{2}$

Remarque : le « en déduire » de la question 3 n'est pas bien adapté à la question. Le raisonnement à dérouler n'est pas une conséquence immédiate de la question précédente.

1) Pour répondre à cette question, on va montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux. Pour cela, déterminons leur coordonnées et constatons qu'elles sont identiques :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
Ceci répond à la question.

2) Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ est un vecteur directeur de la droite (BD). Ses coordonnées sont $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$. Ainsi le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (BD). Une équation cartésienne de (BD) est donc $x+y+c=0$. Comme B est un point de (BD) on a $3+c=0$ soit $c=-3$.

Finalement $(BD) : -3x-3y+9=0$ ou encore $(BD) : x+y-3=0$

3) **a)** *Coordonnées de A' :*

1ère solution :

Un vecteur normal à (BD) est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Déterminons le projeté orthogonal de A sur la droite (BD). Il s'agit du point $H(x\,;\,y)$ tel que $H\in\ (BD)$ et $\overrightarrow{AH}$ colinéaire à $\vec{n}$. Les coordonnées de H s'obtiennent donc en résolvant le système :

$$\begin{cases} x+y-3=0 & (H\in(BD)) \\ x-y+2=0 & (\overrightarrow{AH}\text{ colinéaire à }\vec{n}\,) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 & \text{« 1ère éq. + 2ème éq. »} \\ x-y+2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases}$$

Comme $A'(x'\,;\,y')$ est le symétrique de A par rapport à (BD), on a

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AA'}=2\overrightarrow{AH} \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix}x'+1\\y'-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix}x'+1\\y'-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x'=2 \\ y'=4 \end{cases} \end{aligned}$$

2ème solution :

Un vecteur normal à (BD) est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Soit H le projeté orthogonal de A sur (BD). Alors H est le milieu du segment $[AA']$. En notant $A'(x'\,;\,y')$, les coordonnées de H sont donc $H(\frac{x'+1}{2}\,;\,\frac{y'-1}{2})$. Par ailleurs, $H\in(BD)$ et $\overrightarrow{AA'}$ est colinéaire à un vecteur normal de (BD). Les coordonnées de A' sont donc solution du système suivant :

$$\begin{cases} x'+1+y'-1-6=0 & (H\in(BD)) \\ x'+1-(y'-1)=0 & (\overrightarrow{AA'}\text{ colinéaire à }\vec{n}\,) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x'-4=0 & \text{« 1ère éq. + 2ème éq. »} \\ x'-y'+2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=2 \\ y'=4 \end{cases}$$

b) *$AA'CC'$ rectangle :*

Pour répondre à cette question, nous allons montrer que $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{C'C}$ et que $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{C'A}$ sont orthogonaux.

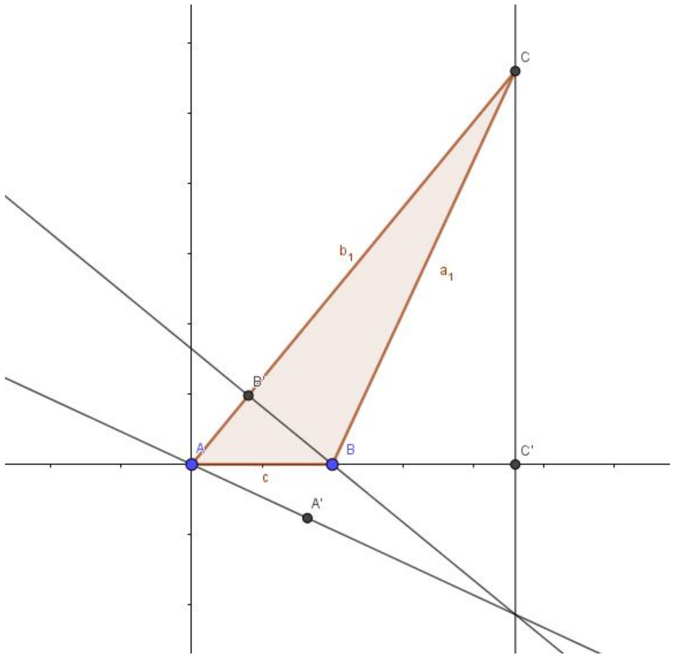
On a bien $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{C'C}$ puisque ces vecteurs ont mêmes coordonnées : $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

De plus, $\overrightarrow{C'A} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

On remarque que $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{C'A} = 3\times-2+3\times2 = 0$ donc $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{C'A}$ sont orthogonaux.

On peut donc conclure que $AA'CC'$ est un rectangle.

- **Bilan** $\boxed{3}$



1) La droite (CC') est perpendiculaire à l'axe des abscisse. Donc $(CC')\ :\ x = x_C$.

2) $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x_C - 1 \\ y_C \end{pmatrix}$.

La droite (AA') est perpendiculaire à (BC). Donc le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal à (AA').

$(AA')\ :\ (x_C - 1) \times x + y_C \times y = 0$ puisque (AA') passe par l'origine.

3) Le vecteur $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (BB').

Donc $(BB')\ :\ x_C \times x + y_C \times y + \alpha = 0$. Comme $B \in (BB')$, on a $x_C + \alpha = 0$ soit $\alpha = -x_C$.

D'où $(BB')\ :\ x_C \times x + y_C \times y - x_C = 0$.

4) Les coordonnées de H sont solution du système

$$\begin{cases} (x_C - 1) \times x + y_C \times y = 0 \\ x_C \times x + y_C \times y - x_C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-x_C}{y_C}x \text{ licite car } y_C \neq 0 \\ x_C \times x + y_C \times y - x_C = 0 \end{cases}$$

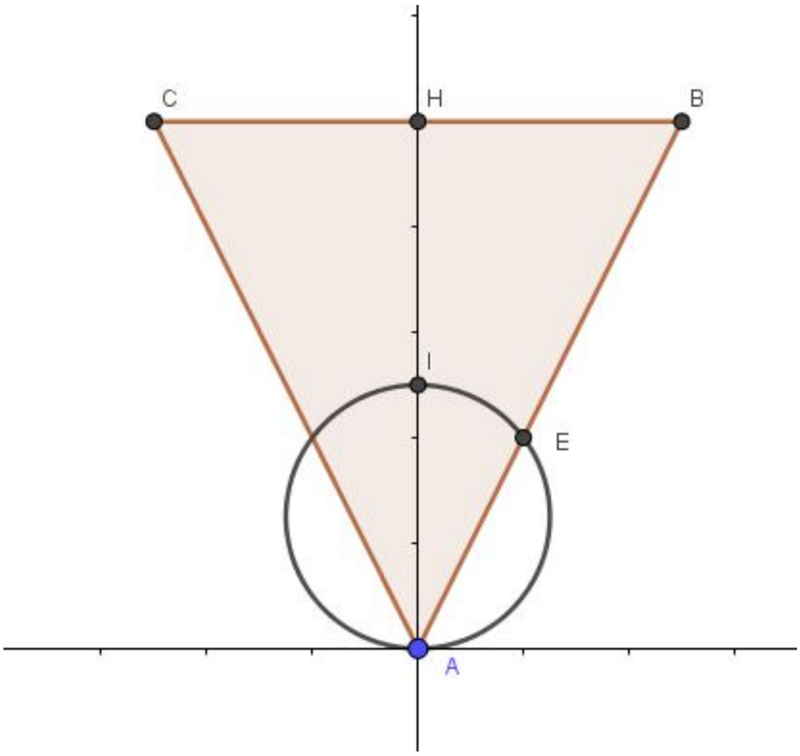
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x_C-1}{y_C}x_C \\ x = x_C \end{cases}$$

On constate que l'abcisse de H est x_C donc $H \in (CC')$.

• **Bilan** $\boxed{5}$

1) Comment construire un tel triangle ? Considérons un repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$. Le triangle ABC est isocèle en A. Donc $AB = AC$. Notons $B(a\,;\,b)$ (avec $a > 0$ et $b \neq 0$) et $C(-a\,;\,b)$. Montrons que b ne peut être quelconque sous la contrainte de l'exercice : on veut que $AH = BC$. On a donc $H(0\,;\,2a)$ puisque H est le milieu du segment $[BC]$ et finalement $2a = b$.

Ainsi, on a $A(0\,;\,0)$, $B(a\,;\,2a)$, $C(-a\,;\,2a)$ et $I(0\,;\,a)$.



2) Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$ où encore $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

D'où $(AB)\,:\,2x - y = 0$ car (AB) passe par l'origine du repère.

3) Le cercle de diamètre $[AI]$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI} = 0 &\Leftrightarrow -x \times -x + -y \times (a - y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - ay = 0 \end{aligned}$$

Une équation du cercle de diamètre $[AI]$ est $x^2 + y^2 - ay = 0$.

3) Soit $E(x\,;\,y)$ avec $x \neq 0$ (le cercle de diamètre $[AI]$ coupe la droite (AI) en deux points distincts : A et E). Les coordonnées de E sont solution de :

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + y^2 - ay = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 + 4x^2 - 2ax = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x(5x - 2a) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4a}{5} \\ x = \frac{2a}{5} \quad \text{car } x \neq 0. \end{cases}$$

On peut donc obtenir AE :

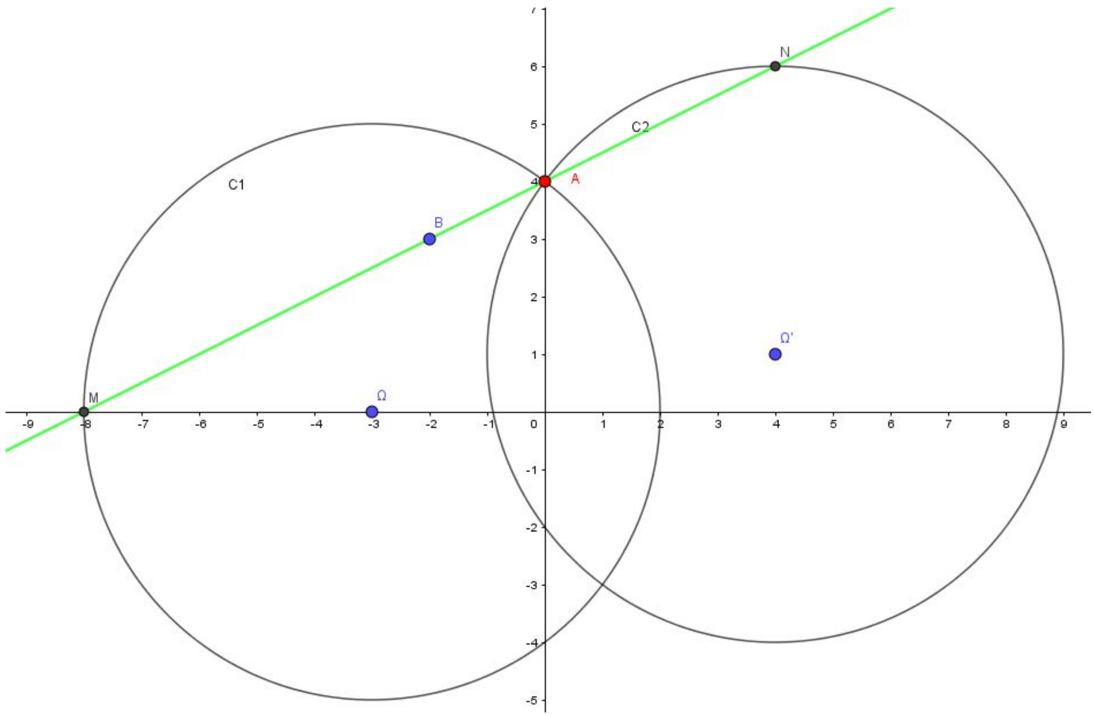
$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{\frac{4a^2}{5^2} + \frac{16a^2}{5^2}} \\ &= \frac{2a\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AE} &= \frac{a\sqrt{5}}{\frac{2a\sqrt{5}}{5}} \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

• **Bilan** $\boxed{\mathbf{6}}$

1)



2) Le point A est le point d'intersection d'ordonnée positive des deux cercles. Déterminons les équations des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$:

$$\mathcal{C} \; : \; (x+3)^2 + y^2 = 25.$$

$$\mathcal{C}' \; : \; (x-4)^2 + (y-1)^2 = 25.$$

Les coordonnées du point A vérifient ce système d'équations équivalent à :

$$\begin{cases} (x+3)^2 + y^2 = 25 \\ (x-4)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 - 6x - 9 \\ x^2 + y^2 = 25 + 8x + 2y - 16 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 - 6x \\ x^2 + y^2 = 8 + 8x + 2y \end{cases}$$

On résout le système pour trouver les coordonnées de A :

$\begin{cases} x^2+y^2=16-6x \\ x^2+y^2=8+8x+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=16-6x \\ -8+14x+2y=0 \end{cases}$ « 2ème équation − 1ère équation »

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(4-7x)^2-16+6x=0 \\ y=4-7x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(50x-50)=0 \\ y=4-7x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

Comme A est d'ordonnée positive, on conclut que $A(0\,;\,4)$.

3) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB) et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$.

D'où $(AB)\,:\,-x+2y+c=0$.

Comme $A\in(AB)$, on a $8+c=0$ soit $c=-8$.

Finalement $(AB)\,:\,-x+2y-8=0$ ou encore $(AB)\,:\,x-2y+8=0$.

4) Le point M est l'intersection de $\mathcal{C}$ et (AB) (deux points sont intersection de $\mathcal{C}$ et de (AB) mais M est distinct de A). Les coordonnées de M sont donc solution du système :

$\begin{cases} x-2y+8=0 \\ x^2+y^2=16-6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4+\frac{x}{2} \\ x^2+\frac{x^2}{4}+10x=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4+\frac{x}{2} \\ x(\frac{5}{4}x+10)=0 \end{cases}$

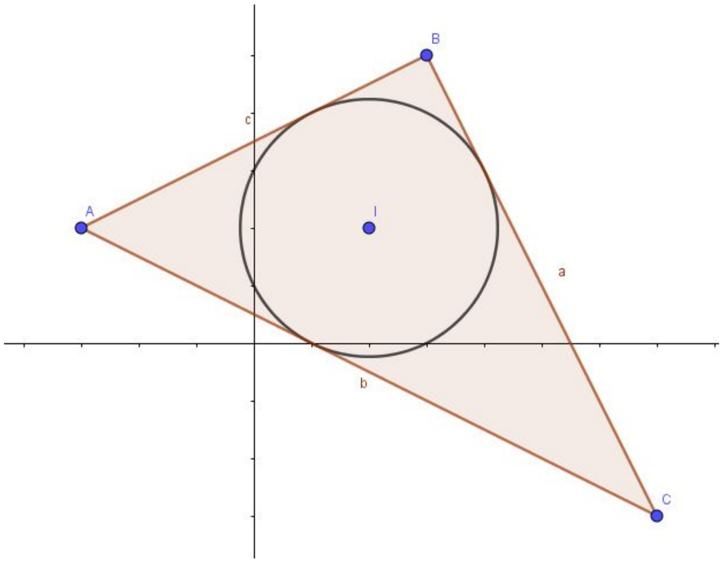
$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=-8 \\ y=0 \end{cases}$

Puisque M est distinct de A on a $M(-8\,;\,0)$.

De la même manière que pour trouver les coordonnées de M, on obtient les coordonnées de N : $N(4\,;\,6)$.

$$\begin{aligned} AM^2+AN^2 &= (-8)^2+4^2+4^2+2^2 \\ &= 100. \end{aligned}$$

- **Bilan** $\boxed{7}$



1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est donc aussi un vecteur directeur de (AB).

$(AB)\ :\ x-2y+c=0$. Comme $A\in(AB)$, on a $-3-4+c=0$ soit $c=7$.

Finalement $(AB)\ :\ x-2y+7=0$.

2) Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d. Donc $d\ :\ -2x-y+c=0$.

Comme $I\in d$, on a $-2\times 2-2+c=0$, soit $c=6$.

On obtient donc $d\ :\ -2x-y+6=0$

3) Le cercle inscrit aux triangles ABC est tangent aux côtés de ce triangle. Notons H le point d'intersection de d et (AB). On a (IH) perpendiculaire à (AB) et donc IH est la longueur du rayon du cercle inscrit.

Pour calculer IH, déterminons tout d'abord les coordonnées du point H solutions du système :

$$\begin{cases}x-2y+7=0\\-2x-y+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5y+20=0 & \text{« } 2\times \text{ 1ère équation } + \text{2ème équation »}\\-2x-y+6=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=4\\x=1\end{cases}$$

On peut maintenant déterminer IH :

$$\begin{aligned}IH&=\sqrt{(-1)^2+2^2}\\&=\sqrt{5}.\end{aligned}$$

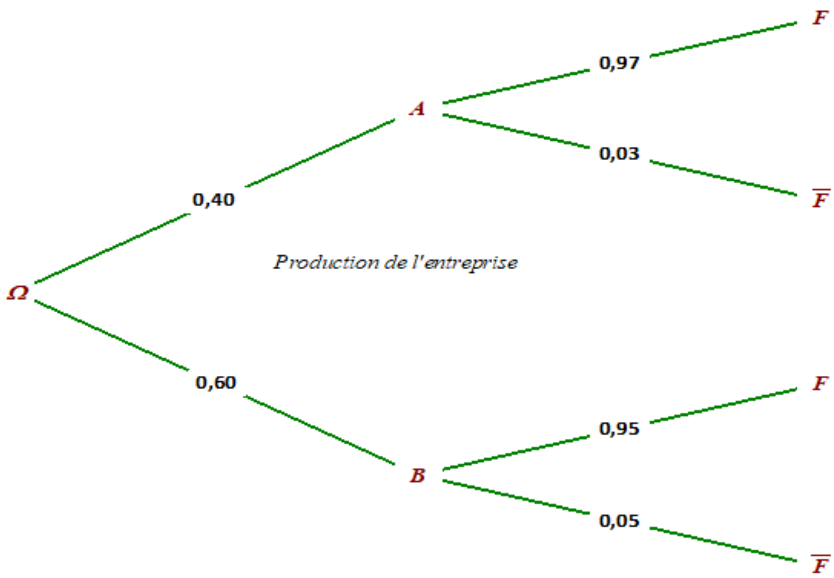
Probabilités conditionnelles

Correction des exercices bilan page 339

• Bilan 1

Les carottes viennent de l'exploitation A ou de l'exploitation B. Elles sont conditionnées dans des filets ou des sachets en plastique.

1°) <u>Arbre pondéré décrivant la production</u>



2°) La probabilité qu'un sachet provienne de l'exploitation A et soit en filet est égale à :
$P(A \cap F) = P(A) \times P_A(F) = 0{,}40 \times 0{,}97 = 0{,}388$

3°) Calculons P(F) la probabilité qu'un sachet produit soit en filets.
A et B forment une partition de l'univers des exploitations. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F) = 0{,}388 + P(B) \times P_B(F) = 0{,}388 + 0{,}60 \times 0{,}95 = 0{,}958$$

4°) Calculons la probabilité que le sachet vienne de A sachant qu'il est en filets :

$$P_F(A) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}388}{0{,}958} \quad (= 0{,}405 \text{ à } 0{,}001 \text{ près})$$

- Bilan $\boxed{2}$

Une agence de voyages propose trois circuits au Canada (C_1, C_2 et C_3) et deux types d'hébergement (chambre de type standard (S) et chambre de type supérieur). Le tableau fourni donne la répartition des 2500 réservations effectuées. On choisit au hasard un client.

1°) $P(C_2 \cap S) = \frac{300}{2500} = 0{,}12$

La probabilité qu'il s'agisse d'un client ayant choisi C_2 en chambre standard est 0,12.

2°) La probabilité que le client ait choisi C_1 sachant qu'il a choisi une chambre de catégorie supérieure est $P_{\bar{S}}(C_1) = \frac{P(C_1 \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{850}{1500} = \frac{17}{30}$.

3°) La probabilité que le client ait choisi une chambre en catégorie supérieure sachant qu'il a choisi C_1 est

$$P_{C_1}(\bar{S}) = \frac{P(C_1 \cap \bar{S})}{P(C_1)} = \frac{850}{1250} = \frac{17}{25}$$

4°) $P(C_2) \times P(S) = \frac{750}{2500} \times \frac{1000}{2500} = \frac{15}{50} \times \frac{2}{5} = 0{,}12$

$P(C_2) \times P(S) = P(C_2 \cap S)$ $donc$ C_2 et S $sont$ $indépendants.$

5°) $P(C_3 \cap \bar{S}) = \frac{200}{2500} = 0{,}08$ et $P(C_3) \times P(\bar{S}) = \frac{500}{2500} \times \frac{1500}{2500} = 0{,}12$

$P(C_3) \times P(\bar{S}) \neq P(C_3 \cap \bar{S})$ $donc$ les $deux$ $événements$ ne $sont$ pas $indépendants.$

Pour cet exercice, erreur d'impression : 200 inscriptions pour $C_3 \cap \bar{S}$

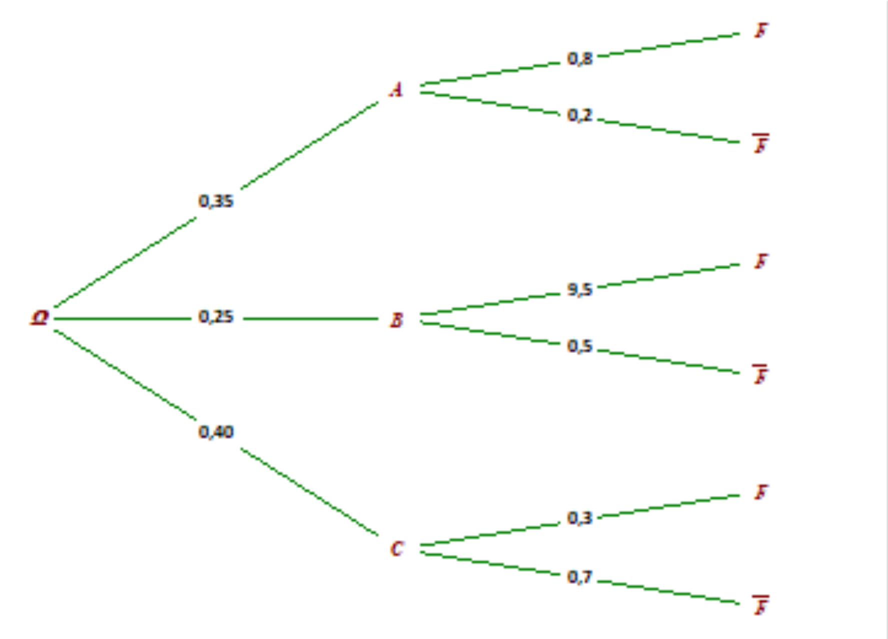
(250 est noté dans le tableau)

(Les totaux des lignes et colonnes ne correspondaient pas au détail des inscriptions selon les catégories)

• Bilan $\boxed{4}$

Les horticulteurs A, B, C fournissent à une jardinerie soit des fleurs (événement F) soit des arbres.

1°) Arbre pondéré traduisant la situation



2°) $P(A \cap F) = P(A) \times P_A(F) = 0{,}40 \times 0{,}8 = 0{,}32$

32% des articles sont des fleurs provenant de A.

3°) Calculons la probabilité de l'événement F.

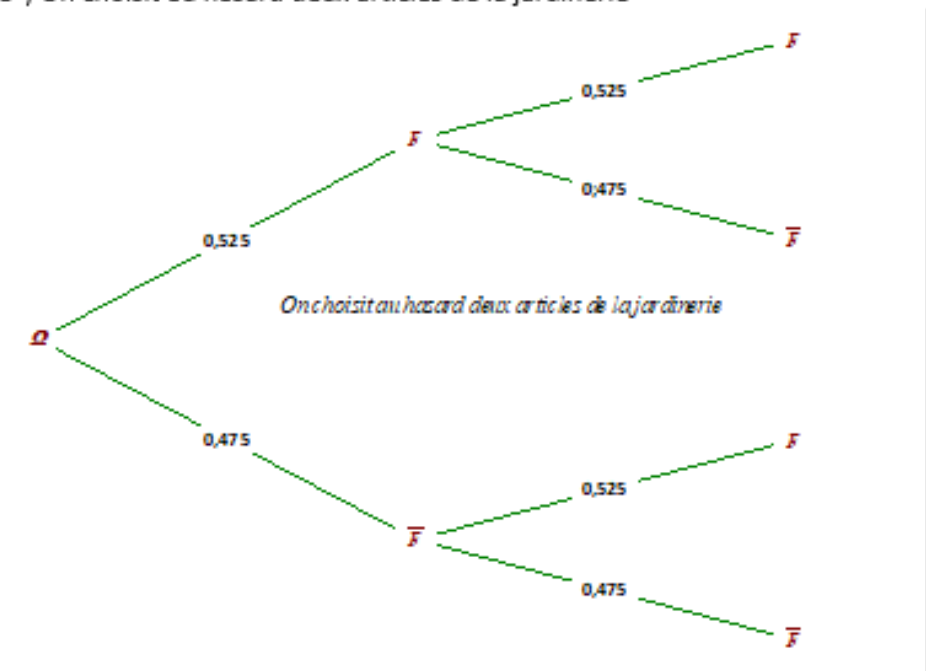
A, B, C forment une partition de l'univers des horticulteurs fournissant la jardinerie. D'après la formule des probabilités totales, $P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F) + P(C \cap F)$.

$$P(F) = 0{,}35 \times 0{,}8 + 0{,}25 \times 0{,}5 + 0{,}40 \times 0{,}3 = 0{,}525$$

4°) La probabilité que l'article vienne de l'horticulteur A sachant que c'est une fleur est :

$$P_F(A) = \frac{P(F \cap A)}{P(F)} = \frac{0{,}32}{0{,}525} = 0{,}609 \text{ au millième près.}$$

5°) On choisit au hasard deux articles de la jardinerie



$$P(\text{obtenir deux fleurs}) = 0{,}525^2 = 0{,}276 \text{ au millième près}$$
$$\text{et } P(\text{obtenir 1 fleur} + 1 \text{ arbre}) = 0{,}525 \times 0{,}475 \times 2 = 0{,}499 \text{ au millième près.}$$

Variables aléatoires

Correction des exercices bilan page 373

• Bilan 2

Pour chaque question du Q C M, il y a trois propositions de réponses dont une seule exacte. Un candidat répond au hasard.
Une réponse exacte rapporte n point(s) et une réponse fausse fait perdre p point(s).
N est la note algébrique attribuée pour une question

1°) $P(N = n) = \frac{1}{3}$ *et* $P(N = -p) = \frac{2}{3}$

2°) *L'espérance de N :* $E(X) = \frac{n}{3} - \frac{2p}{3}$ *donc* $E(X) = 0$ *pour* $n = 2p$.

• Bilan 4

Quatre garçons et cinq filles écrivent chacun leur nom sur un carton. Puis ils tirent au hasard successivement et sans remise deux cartons qui désigneront les deux conducteurs qui devront rester sobres. On note les événements

F_1 *désigne une fille au premier tirage,* F_2 *désigne une fille au 2è tirage*
G_1 *désigne un garçon au premier tirage,* G_2 *désigne un garçon au 2è tirage*

1°) a) $P_{G_1}(F_2) = \frac{5}{8}$

1°) b) $P(G_1 \cap F_2) = P(G_1) \times P_{G_1}(F_2) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{18}$

$P(F_1 \cap G_2) = P(F_1) \times P_{F_1}(G_2) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18} = P(G_1 \cap F_2)$

2°) La probabilité d'avoir deux conductrices en fin de soirée est : $P(F_1 \cap F_2) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$

3°) Le premier tirage peut permettre de sélectionner soit une fille soit un garçon. La probabilité que le hasard désigne une fille au deuxième tirage est : $P(G_1 \cap F_2) + P(F_1 \cap F_2) = \frac{5}{18} + \frac{5}{18} = \frac{5}{9}$

4°) X est la variable aléatoire désignant le nombre de filles sélectionnées

$P(X = 0) = P(G_1 \cap G_2) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

$P(X = 1) = \frac{5}{18} + \frac{5}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

$P(X = 2) = P(F_1 \cap F_2) = \frac{5}{18}$

$E(X) = \sum_{i=0}^{i=2} p_i x_i = 0 + \frac{10}{18} + \frac{10}{18} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$