# $\boxed{\text{Fonctions dérivées – Applications}}$

Correction des exercices bilan page 135

• **Bilan** $\boxed{1}$

**1) Rappel :** Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$.

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\times 3x^2 - 5\times 2x + 2\times 1 - 0$, soit $f'(x) = 6x^2 - 10x + 2$.

**2) Rappel :** Si $n$ est un entier strictement négatif, $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et a pour dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$.

Pour tout $x \in I$, $g(x) = 2x - 3 \times x^{-2}$ donc $g'(x) = 2 \times 1 - 3 \times (-2x^{-2-1})$, soit $g'(x) = 2 + 6x^{-3} = 2 + \dfrac{6}{x^3}$.

**3)** On a $h = uv$ avec $u : x \mapsto 3x - 1$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$, fonctions dérivables sur $I = ]0\,;+\infty[$, donc $h$ est dérivable sur $I$ et $h' = u'v + uv'$, soit pour tout $x \in I$,
$h'(x) = 3\sqrt{x} + (3x-1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + 3x - 1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{6\sqrt{x}^2 + 3x - 1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{9x-1}{2\sqrt{x}}$.

**4)** On a $j = \dfrac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto 2x + 5$ et $v : x \mapsto 6 - x$, fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (et $v$ ne s'annulant pas sur $I = ]-\infty\,;6[$ ), donc $j$ est dérivable sur $I$ et $j' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, soit pour tout $x \in I$, $j'(x) = \dfrac{2(6-x) - (2x+5) \times (-1)}{(6-x)^2} = \dfrac{17}{(6-x)^2}$.

**5) Rappel :** Soient $a$, $b$ deux réels et $I$, $J$ deux intervalles. Si $g$ est une fonction dérivable sur $J$ et si pour tout réel $x \in I$, $ax + b \in J$, alors $x \mapsto g(ax+b)$ est dérivable sur $I$ de dérivée $x \mapsto a\,g'(ax+b)$.

Ici, on a $k(x) = g(-7x+4)$, avec $g(x) = x^5$ (les conditions d'application du rappel sont satisfaites avec $a = -7$, $b = 4$ et $I = J = \mathbb{R}$). On a $g' : x \mapsto 5x^4$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k'(x) = -7\,g'(-7x+4) = -7 \times 5(-7x+4)^4$, soit $k'(x) = -35(4-7x)^4$.

• **Bilan** $\boxed{2}$

La fonction $f$ est croissante sur $]-\infty\,;-1]$ et sur $[2\,;+\infty[$, et décroissante sur $[-1\,;2]$. Si $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée $f'$ est donc positive sur $]-\infty\,;-1]$ et sur $[2\,;+\infty[$, et négative sur $[-1\,;2]$, ce qui fait de $g$ un candidat plausible pour être la dérivée de $f$.

En revanche si $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f$ ne peut pas être la dérivée de $g$, car $g$ est par exemple décroissante sur $[-1\,;0]$, alors que $f$ est positive sur $[-1\,;0]$.

• **Bilan** $\boxed{3}$

**1)** On a $f = \dfrac{u}{v}$, avec $u : x \mapsto 2x+3$ et $v : x \mapsto x^2+4$, fonctions dérivables sur $I = [-6\,;2]$ (notons que pour tout réel $x$, $x^2 + 4 \geqslant 4$ donc $v$ ne s'annule pas sur $I$), donc $f$ est dérivable sur $I$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, soit pour tout $x \in I$,
$f'(x) = \dfrac{2(x^2+4) - (2x+3) \times 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-2x^2 - 6x + 8}{(x^2+4)^2} = \dfrac{2(-x^2 - 3x + 4)}{(x^2+4)^2}$.

Comme $2 > 0$ et $(x^2+4)^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-x^2-3x+4$, trinôme du second degré qui possède deux racines : $-4$ et $1$ (détails des calculs laissés au lecteur) ; celui-ci est donc strictement négatif (du signe de $a=-1$, coefficient de $x^2$ du trinôme) sauf lorsque $x \in [-4\,;1]$. On peut en déduire le tableau des variations de $f$ :

| $x$ | $-6$ | | $-4$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h$ | $-\frac{9}{40}$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{4}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{7}{8}$ |

$$f(-6)=\frac{2\times(-6)+3}{(-6)^2+4}=-\frac{9}{40} \qquad f(1)=\frac{2\times 1+3}{1^2+4}=\frac{5}{5}=1$$
$$f(-4)=\frac{2\times(-4)+3}{(-4)^2+4}=-\frac{5}{20}=-\frac{1}{4} \qquad f(2)=\frac{2\times 2+3}{2^2+4}=\frac{7}{8}$$

**2)** D'après son tableau des variations, $f$ possède un maximum sur $I$ égal à 1 (atteint en $x=1$) et un minimum sur $I$ égal à $-\dfrac{1}{4}$ (atteint en $x=-4$).

**3)** Toujours d'après son tableau des variations, sur $[-4\,;2]$, $f$ possède aussi un maximum égal à 1 et un minimum égal à $-\dfrac{1}{4}$, donc pour tout $x\in[-4\,;2]$, $-\dfrac{1}{4} \leqslant f(x) \leqslant 1$, et il s'agit du « meilleur » encadrement possible.

- **Bilan** $\boxed{5}$

**A)** **1)** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=2\times 3x^2+2x-0=6x^2+2x=2x(3x+1)$.
$6x^2+2x$ est un polynôme du second degré possédant deux racines : 0 et $-\frac{1}{3}$ ; celui-ci est donc strictement positif (du signe de $a=6$, coefficient de $x^2$ du polynôme) sauf lorsque $x\in\left[-\frac{1}{3}\,;0\right]$, d'où le tableau des variations de $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | | | $+$ | |
| $g$ | | $\nearrow$ | $-\frac{26}{27}$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

$g(0)=2\times 0^3+0^2-1=-1$
$g\left(-\frac{1}{3}\right)=2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^2-1=-\frac{2}{27}+\frac{3}{27}-\frac{27}{27}=-\frac{26}{27}$

**2)** **a)** D'après son tableau des variations, $g$ possède un maximum égal à $-\frac{26}{27}$ sur $]-\infty\,;0[$, par conséquent pour tout $x\in]-\infty\,;0[$, $g(x)\leqslant-\frac{26}{27}<0$. Comme $g(\alpha)=0$, cela prouve que $\alpha\notin]-\infty\,;0[$, soit $\alpha\geqslant 0$.

On a $g(2)=2\times 2^3+2^2-1=19$, donc $\overbrace{g(\alpha)}^{0}\leqslant g(2)$, ce qui prouve que $\alpha\leqslant 2$, par stricte croissance de $g$ sur $[0\,;+\infty[$. Finalement on a bien $0\leqslant\alpha\leqslant 2$.

**b)**

Algorithme :

$x \leftarrow 0$
$y \leftarrow -1$
Tant que $y < 0$, faire :
  $x \leftarrow x + 0,01$
  $y \leftarrow g(x)$
Fin Tant que

Traduction en Python :

```
x = 0
y = -1
while y < 0:
    x = x + 0.01
    y = 2*x**3+x**2-1
print(x)
```

$\hookrightarrow$ L'exécution du programme Python entraîne l'affichage « 0.66 », ce qui correspond à une valeur approchée de $\alpha$ à 0,01 près.

**3)** On déduit des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**B)** **1)** **a)** $f : x \mapsto \dfrac{1}{3}\left(x^2 + x + \dfrac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(2x + 1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2x^3}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{2x^3 + x^2 - 1}{3x^2} = \frac{g(x)}{3x^2}.$$

**b)** Si $x \in \mathbb{R}^*$, $3x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. On déduit de A.3. les variations de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\searrow$ | $\|$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | |

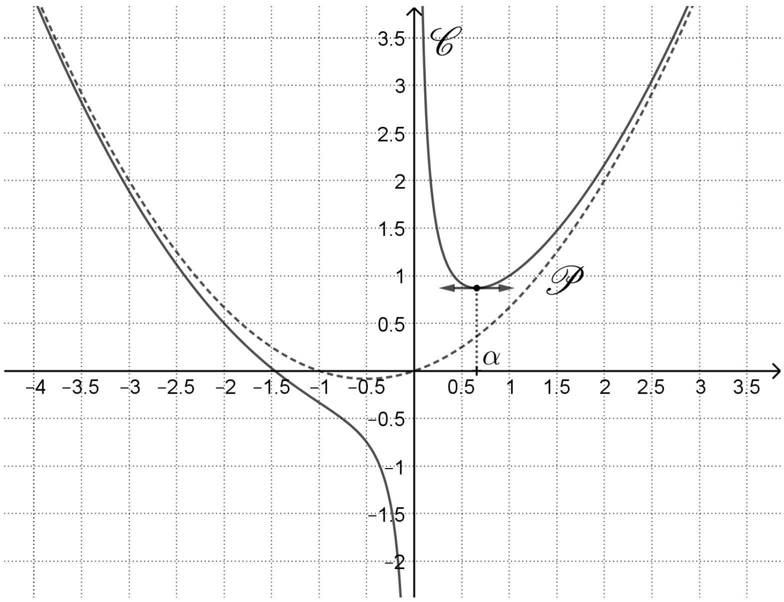
**2)** Soit $x \in \mathbb{R}^*$ ; on a $f(x) - h(x) = \dfrac{1}{3}\left(x^2 + x + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{3}\left(x^2 + x\right)$,

soit $f(x) - h(x) = \dfrac{1}{3x}$.

Par conséquent :

- si $x < 0$, $f(x) - h(x) < 0$, soit $f(x) < h(x)$, ce qui prouve que $\mathscr{C}$ est au dessous de $\mathscr{P}$ sur $]-\infty\,;0[$,
- si $x > 0$, $f(x) - h(x) > 0$, soit $f(x) > h(x)$, ce qui prouve que $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{P}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Voici à titre indicatif l'allure de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{P}$ :




• **Bilan** $\boxed{6}$

**Remarque :** $x$ désigne une des dimensions (en m) de l'enclos (pas forcément sa largeur) et $x$ varie a priori dans l'intervalle $I = ]0\,;+\infty[$.

**1)** Si $y$ désigne l'autre dimension (en m) de l'enclos, sa superficie (en m$^2$) est $xy$, donc $xy = 98$, d'où $y = \dfrac{98}{x}$.

Le périmètre $P(x)$ de l'enclos est alors égal à $2(x+y) = 2\left(x + \dfrac{98}{x}\right)$,

soit $P(x) = 2x + \dfrac{196}{x}$.

**2)** On a pour tout $x \in I$, $P(x) = 2x + 196 \times \dfrac{1}{x}$, donc $P$ est dérivable sur $I$ et pour tout $x \in I$, $P'(x) = 2 + 196 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{2x^2}{x^2} - \dfrac{196}{x^2} = \dfrac{2(x^2-98)}{x^2}$.

Soit $x \in I$ ; comme $2 > 0$ et $x^2 > 0$, $P'(x)$ est du signe de $x^2 - 98$ :

- $x^2 - 98 > 0 \iff x^2 > 98 \iff x > \sqrt{98}$ (par stricte croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$).
- $x^2 - 98 = 0 \iff x^2 = 98 \iff x = \sqrt{98}$ (car $x > 0$).

On en déduit le tableau des variations de la fonction $P$ sur $I$ :

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{98}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $P$ | ‖ | ↘ | $P(\sqrt{98})$ | ↗ | |

La fonction $P$ possède un minimum en $x = \sqrt{98}$ : le périmètre de l'enclos est donc minimal lorsque ses dimensions valent $x = \sqrt{98}$ et $y = \dfrac{98}{x} = \dfrac{98}{\sqrt{98}} = \sqrt{98}$, ce qui correspond à un enclos carré.

# $\boxed{\text{Suites}}$

Correction des exercices bilan page 175

• **Bilan** $\boxed{1}$

$u_n = n^3 - n + 4$

**1)** $u_0 = 4; u_1 = 4; u_2 = 10$

**2)** $u_{n+1} = (n+1)^3 - (n+1) + 4 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 + 4 = n^3 + 3n^2 + 2n + 4$

**3)** $u_{n+1} - u_n = n^3 + 3n^2 + 2n + 4 - (n^3 - n + 4) = 3n^2 + 3n = 3n(n+1)$

**4)** Pour tout entier naturel $n$,
$n \geqslant 0, n+1 > 0$ donc $3n(n+1) \geqslant 0$ soit $u_{n+1} \geqslant u_n$
Le suite $(u_n)$ est donc croissante.

**4)** **a)** La fonction appelée $u$ permet, pour chaque entier $n$ de calculer la valeur de $u_n$.

**b)** Pour $A = 100$, on obtient $n = 5$.
Pour $A = 100000$, on obtient $n = 47$.
Pour $A = 10^{20}$, on obtient $n = 4641589$ à faire sur l'ordinateur car il y a beaucoup d'itérations, ce qui sature la calculatrice !

**c)** On peut penser que la suite tend vers $+\infty$, car pour $A$ aussi grand qu'on veut, on peut trouver un rang à partir duquel les valeurs de $u_n$ dépassent $A$.

• **Bilan** $\boxed{3}$

**1)** $u_1 = u_0 - 30 = 570; u_2 = u_0 - 30 = 540$

**2)** **a)** $u_{n+1} = u_n - 30$.

**b)** La suite est arithmétique de raison 30 et de premier terme 600.

**c)** $u_n = u_0 - 30n$

**d)** $u_{10} = u_0 - 30 \times 10 = 600 - 300 = 300$
En 2028 le quota annuel de pêche sera de 300 tonnes.

**e)** $u_n \leqslant 200 \Leftrightarrow 600 - 30n \leqslant 200 \Leftrightarrow -30n \leqslant -400 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{400}{30}$
Le plus petit entier supérieur à $\frac{400}{30}$ est 14. Le quota passera en dessous de 200 tonnes en 2032.

2) a) $S$ représente la quantité totale (en tonnes) de poissons pêchés de l'année 2018 inclus à 2028 inclus.

b) $S = u_0 + (u_0 - 1 \times 30) + (u_0 - 2 \times 30) + (u_0 - 3 \times 30) + ... + (u_0 - 10 \times 30)$
$S = 11u_0 - 30 \times (1 + 2 + .. + 10)$

c) D'après le cours $1 + 2 + .. + n = \frac{n(n+1)}{2}$ Il vient,
$S = 11u_0 - 30 \times (1 + 2 + .. + 10) = 11 \times 600 - 30 \times \frac{10 \times 11}{2} = 4950$
Il est aussi possible d'utiliser directement la formule donnant la somme des termes d'une suite arithmétique :

$$S = \frac{(premier..terme + dernier..terme)nombre..de..termes}{2}$$

Il vient,
$S = \frac{(u_0+u_{10})\times 11}{2} = \frac{(600+300)\times 11}{2} = 4950$
4950 tonnes ont été pêchés entre 2018 et 2028.

- **Bilan** $\boxed{4}$

1) Une réduction de 10% correspond à une multiplication par 0,9.
$u_1 = 0,9 \times u_0 = 0,9 \times 50000 = 45000$
$u_2 = 0,9 \times u_1 = 0,9 \times 45000 = 40500$

2) a) $u_{n+1} = 0,9u_n$

b) La suite est géométrique de premier terme 50 000 et de raison 0,9.

c) $u_n = u_0 \times 0,9^n = 50000 \times 0,9^n$

3) $u_{n+1} - u_n = 50000 \times 0,9^{n+1]} - 50000 \times 0,9^n = 50000 \times 0,9^n \times 0,9 - 50000 \times 0,9^n$
$u_{n+1} - u_n = 50000 \times 0,9^n \times (0,9 - 1) = -5000 \times 0,9^n$
On en déduit que pour tout entier $n$, $u_{n+1} - u_n < 0$
La suite est donc décroissante

4) $u_{10} = 50000 \times 0,9^{10} \simeq 17433,92$ En 2025 il y aura environ 17434 abeilles.

5) On cherche le plus petit entier $n$ tel que $u_n \leq 25000$.
$u_6 = 26572,05; u_7 = 23914,85$ : Le nombre d'abeilles a diminué de moitié après 7 ans soit en 2022.

- **Bilan** $\boxed{5}$

**1)** Une baisse de 6Une augmentation de 8% revient à une multiplication par 1,08.
$a_1 = 0,94a_0 = 0,94 \times 250000 = 235000$
$a_2 = 0,94a_1 = 0,94 \times 235000 = 220900$
$b_1 = 1,08b_0 = 1,08 \times 54000 = 58320$
$b_2 = 1,08b_1 = 1,08 \times 58320 = 62985,6$

**2)** Pour tout entier $n$,
$a_{n+1} = 0,94a_n$
$b_{n+1} = 1,08b_n$

**3)** La suite $(a_n)$ est géométrique de premier terme 250 000 et de raison 0,94
La suite $(b_n)$ est géométrique de premier terme 54 000 et de raison 1,08

**4)** $a_n = a_0 \times 0,94^n ; b_n = b_0 \times 1,08^n$
2025 correspond à $n = 8$
$a_8 = 250000 \times 0,94^8 = 152392,2$
$b_n = 54000 \times 1,08^n = 99950,23$
En 2025 152 392 ordinateurs et 99 950 tablettes seront vendues aux entreprises.

**4)** **a)** .

```
n = 0
a = 250000
b = 54000
while b < a :
        a = 0.94 * a
        b = 1.08 * b
        n = n + 1
print(n)
```

**b)** Le résultat est $n = 12$. Le nombre de tablettes vendues dépassera le nombre d'ordinateurs en 2029.

# $\boxed{\text{Exponentielle}}$

Correction des exercices bilan page 207

- **Bilan** $\boxed{1}$

**1)**

$$\frac{f(t+1)}{f(t)} = \frac{104,8 \times exp^{-0,016(t+1)}}{104,8 \times exp^{-0,016t}} = exp^{-0,016(t+1)+0,016t} = exp^{-0,016} \simeq 0,98$$

**2)** **a)** Taux d'évolution

$$\frac{f(t+1)-f(t)}{f(t)} = \frac{f(t+1)}{f(t)} - 1 \simeq -1,59\%$$

La production a diminue de 1,59%

**b)** Avec la calculatrice, la consommation passe en dessous de 90 pour $t = 10$ c'est à dire en 2021.

**3)** A long terme, la consommation annuelle de yaourts se rapproche de 0.

- **Bilan** $\boxed{2}$

$$f(x) = (3x-1)e^x$$

**1)** **a)** On pose $u(x) = 3x - 1, u'(x) = 3$ et $v(x) = e^x, v'(x) = e^x$, $f' = u'v + uv'$

$$f'(x) = 3e^x + (3x-1)e^x = (3x+2)e^x$$

**b)et c)** Pour tout $x$, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $3x + 2$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f$ | | $\searrow$ | -1.54 | $\nearrow$ | |

**2)** **a)** Pour tout $x, e^x > 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

La courbe représentative de $f$ coupe l'axe des abscisses en $A(\frac{1}{3}; 0)$

**b)** Pour tout $x, e^x > 0$, $f$ est donc du signe de $3x - 1$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

**3)** **a)** $f(0) = -1$ La courbe représentative de $f$ coupe l'axe des ordonnées en $B(0; -1)$

**b)** $f'(0) = 2$. La tangente à pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ Soit :
$y = 2x - 1$

• **Bilan** $\boxed{3}$
$f(x) = 3x - 2e^{-x}$

**1)** $f'(x) = 3 - 2 \times (-1) \times e^{-x} = 3 + 2e^{-x}$
Pour tout $x, f'(x) > 0$. $f$ est donc strictement croissante. Elle n'admet donc pas de maximum. FAUX

**2)** $f(0) = -2; f'(0) = 5$. L'équation de la tangente en 0 est donc $y = 5x - 2$
Pour $x = \frac{2}{5}; y = 5 \times \frac{2}{5} - 2 = 0$. La tangente passe donc bien par le point $A(\frac{2}{5}; 0)$. VRAI.

**3)** $f(0) = -2$ donc $f$ n'est pas à valeurs positives pur tout $x$. FAUX

**4)** $f(0) = -2$ et la fonction $f$ est strictement croissante. On en déduit
$\forall x > 0, f(x) > -2$ . VRAI

• **Bilan** $\boxed{4}$

**PARTIE A**

**1)** La vitesse est maximale en $t = 0$. La pente de la tangente est la plus forte.

**2)** La personne la moins corpulente est celle de la courbe 2. L'alcool monte moins dans le sang.

**PARTIE B**

$$C(t) = 2te^{-t}$$

**1)** On pose $u(t) = 2t, u'(x) = 2$ et $v(x) = e^{-t}, v'(x) = (-1) \times e^{-t}$, $f' = u'v + uv'$

$$f'(t) = 2e^{-t} + 2t \times (-1)e^{-t} = (2 - 2t)e^{-t}$$

Pour tout $t$, $e^{-t} > 0$ donc $f'(t)$ est du signe de $2 - 2t$

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2 - 2t$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f$ | . | $\nearrow$ | 0.74 | $\searrow$ | . |

**2)** Le taux est maximal au bout d'une heure. Celui-ci sera de $0,74 g/l$.

**3)** On attend plus d'une heure pour que le taux commence à baisser. A l'aide de la calculatrice, on regarde pour quelle valeur de $t > 1$, $f(t)$ passe en dessous de 0.2. pour $t = 2,3$ soit 2 heures et 20 minutes.

- **Bilan** $\boxed{5}$

$$f(x) = Ee^{-\frac{t}{RC}}$$

**1)** $RC = 40$; $\frac{1}{RC} = 0,025$. Donc,
$u(t) = 10e^{-0,025t}$

**2)** **a)** $u(10) = 7,79$. Au bout de 10 secondes, la tension est de $7,79V$.

**b)** On cherche $t$ tel que $u(t) = 5$. A la calculatrice :
$u(27) \simeq 5,09$, $u(28) \simeq 4,96$ La tension passe en dessous de 5V après 28 secondes.

**3)** **a)** $u'(t) = 10\times(-0,025)\times e^{-0,025t} = -0,25e^{-0,025t}$. Pour tout $t$, $e^t > 0$ donc $u'(t) < 0$.
La fonction $u$ est donc décroissante.

**b)** La tension diminue au cours du temps.