EXERCICE 1 : Calcul fractionnaire

$A = \frac{2}{7} + \frac{11}{7} + \frac{1}{4} = \frac{59}{28}$

$B = \frac{1}{12} + \frac{1}{16} = \frac{7}{48}$

$C = \frac{5}{12} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}$

$D = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$

$E = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

$F = \frac{-3}{5} \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{10}$

$G = -\frac{7}{3} \times (-6) \times \frac{2}{-14} = -2$

$H = 3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{20}$

$I = \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{18}$

$J = \frac{5}{11} - \frac{8}{11} \times \frac{5}{4} = -\frac{5}{11}$

$K = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{20}{21}} = \frac{5}{6} \times \frac{21}{20} = \frac{7}{8}$

$L = \frac{3 + \frac{1}{5}}{3 - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{16}{5}}{\frac{14}{5}} = \frac{16}{5} \times \frac{5}{14} = \frac{8}{7}$

EXERCICE 2 : Développements

$A = 2(x+3) = 2x+6$
$B = 3x(x-5) = 3x^2 - 15x$
$C = -5(2x-4) = -10x+20$
$D = x(x-2) - 6(x+3) = x^2 - 2x - 6x - 18 = x^2 - 8x - 18$
$E = (2x-3)(x+5) = 2x^2 + 10x - 3x - 15 = 2x^2 + 7x - 15$
$F = (6-5x)(-x-2) = -6x - 12 + 5x^2 + 10x = 5x^2 + 4x - 12$
$G = (x+x^2) - (2x-2x^2) + (3x^2+4x+2) = x + x^2 - 2x + 2x^2 + 3x^2 + 4x + 2 = 6x^2 + 3x + 2$
$H = (7+x)^2 = x^2 + 14x + 49$
$I = (4-3x)^2 = 9x^2 - 24x + 16$
$J = (5-2x)^2 - (3-x)(3+x) = 25 - 20x + 4x^2 - (9-x^2) = 25 - 20x + 4x^2 - 9 + x^2 = 5x^2 - 20x + 16$

EXERCICE 3 : Factorisations (1)

$A = x^2 - 13x = x(x-13)$
$B = 16x^2 - 12x = 4x(4x-3)$
$C = \frac{3}{4} - \frac{9}{4}x = \frac{3}{4}(1-3x)$
$D = 3x^2 + 6x^3 + 9x^4 = 3x^2(1 + 2x + 3x^2)$
$E = (x-5)(4x-3) - (2x-7)(4x-3) = (4x-3)[(x-5)-(2x-7)] = (4x-3)(x-5-2x+7) = (4x-3)(-x+2)$
$F = (2x+3)^2 + (2x+3)(x-1) = (2x+3)[(2x+3)+(x-1)] = (2x+3)(2x+3+x-1) = (2x+3)(3x+2)$

EXERCICE 4 : Factorisations (2)

$A = 9x^2 - 1 = (3x)^2 - 1^2 = (3x-1)(3x+1)$
$B = 4 - 4x + x^2 = (2-x)^2$
$C = 9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2$
$D = 4x^2 - 36 = (2x)^2 - 6^2 = (2x-6)(2x+6) = 4(x-3)(x+3)$
$E = 16x^2 - 40x + 25 = (4x-5)^2$
$F = 9 + 12x + 4x^2 = (3+2x)^2$

EXERCICE 5 : (Équations)

A) Résolution des équations :

1. $3x + 1 = x + 2$

   $2x = 1$

   $x = \frac{1}{2}$

   La solution est $\frac{1}{2}$.

2. $3x - 2 = 5x + 4$

   $-2x = 6$

   $x = -3$

   La solution est -3.

3. $x - (3x + 6) = 5 + (7 - x)$

   $-2x - 6 = 12 - x$

   $-x = 18$

   $x = -18$

   La solution est -18.

4. $x + 4 = 3x + (5 - x)$

   $x + 4 = 2x + 5$

   $-x = 1$

   $x = -1$

   La solution est -3

5. $(3x + 8)(5x + 2) = 0$

   $3x + 8 = 0$ ou $5x + 2 = 0$

   $3x = -8$ ou $5x = -2$

   $x = -\frac{8}{3}$ ou $x = -\frac{2}{5}$

   Les solutions sont $-\frac{8}{3}$ et $-\frac{2}{5}$.

6. $x^2 = 16$

   $x^2 - 16 = 0$

   $(x - 4)(x + 4) = 0$

   $x - 4 = 0$ ou $x + 4 = 0$

   $x = 4$ ou $x = -4$

   Les solutions sont 4 et -4.

B) $(3x + 4)(16x - 4) + (2x - 9)(3x + 4) = (3x + 4)[(16x - 4) + (2x - 9)] = (3x + 4)(16x - 4 + 2x - 9) = (3x + 4)(18x - 13)$

$(3x + 4)(16x - 4) + (2x - 9)(3x + 4) = 0$

$(3x + 4)(18x - 13) = 0$

$x = -\frac{4}{3}$ ou $x = \frac{13}{18}$

Les solutions sont $-\frac{4}{3}$ et $\frac{13}{18}$.

EXERCICE 6 : (Puissances (1))

$A = 10^2 \times 10^5 = 10^7$

$B = \frac{10^5}{10^9} = 10^{-4}$

$C = 3^4 \times 5^4 = (3 \times 5)^4 = 15^4$

$D = 2 \times 2^5 = 2^1 \times 2^5 = 2^6$

$E = 10^3 \times 0{,}01 \times 10000 = 10^3 \times 10^{-2} \times 10^4 = 10^5$

$F = 27 \times 3^{-2} \times 3^4 = 3^3 \times 3^{-2} \times 3^4 = 3^5$

EXERCICE 7 : (Puissances (2))

$A = 4^{-1} = \frac{1}{4}$

$B = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

$C = 3^2 \times 2^{-2} = 3^2 \times \frac{1}{2^2} = \frac{9}{4}$

EXERCICE 8 : (Fonctions - lectures graphiques)

1. L'image de -1 par f est 2.
   L'image de 0 par f est 1.
   L'image de 1 par f est -1.
   L'image de 2 par f est -2.
   L'image de 4 par f est 1.
2. Les antécédents de -1 par f sont 1 et 3.
   Les antécédents de 0 par f sont 0,5 et 3,5.
   Les antécédents de 1 par f sont -2 ; 0 et 4.
   L'antécédent de 2 par f est -1.
   4 n'a pas d'antécédent par f.

EXERCICE 9 : (Fonctions affines)

1. $g(-2) = -2 \times (-2) + 3 = 7$
   L'image de -2 par g est 7.
   $g\left(\frac{-2}{3}\right) = -2 \times \left(\frac{-2}{3}\right) + 3 = \frac{4}{3} + \frac{9}{3} = \frac{13}{3}$
   L'image de $\frac{-2}{3}$ par g est $\frac{13}{3}$.
   $g(7) = -2 \times 7 + 3 = -14 + 3 = -11$
   L'image de 7 par g est -11.
2. $g(x) = 0$
   $-2x + 3 = 0$
   $-2x = -3$
   $x = \frac{3}{2}$
   L'antécédent de 0 par g est $\frac{3}{2}$.

2. $g(x) = 3$
   $-2x + 3 = 3$
   $-2x = 0$
   $x = 0$
   L'antécédent de 3 par g est 0.
   $g(x) = -2$
   $-2x + 3 = -2$
   $-2x = -5$
   $x = \frac{5}{2}$
   L'antécédent de -2 par g est $\frac{5}{2}$.

EXERCICE 10 : (Géométrie plane)

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté le plus long : comme $AB < BC$ alors le triangle ABC ne peut pas être rectangle en C.
Supposons que le triangle ABC soit rectangle. D'après ce qui précède, il y a deux cas :
- le triangle ABC est rectangle en B. Le théorème de Pythagore implique que $BA^2 + BC^2 = AC^2$ donc $AC^2 = 144 + 169$ donc $AC^2 = 313$ donc $AC = \sqrt{313}$.
- le triangle ABC est rectangle en A. Le théorème de Pythagore implique que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ donc $144 + AC^2 = 169$ donc $AC^2 = 25$ donc $AC = 5$.
Pour que ABC soit rectangle, AC doit donc être égal à $\sqrt{313}$ ou 5.
Inversement, la réciproque théorème de Pythagore garantit que les deux valeurs de AC précédentes font bien de ABC un triangle rectangle.

EXERCICE 11 : (Nombres premiers)

1. On a $69 = 3 \times 23$,

   $1\ 150 = 115 \times 10 = 5 \times 23 \times 2 \times 5 = 2 \times 5^2 \times 23$, et

   $4\ 140 = 414 \times 10 = 6 \times 69 \times 10 = 2 \times 3 \times 3 \times 23 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 23$.

2. $A = \dfrac{69}{1150} = \dfrac{3 \times 23}{2 \times 5^2 \times 23} = \dfrac{3}{2 \times 5^2} = \dfrac{3}{50}$

   $B = \dfrac{1150}{4140} = \dfrac{2 \times 5^2 \times 23}{2^2 \times 3^2 \times 5 \times 23} = \dfrac{5}{2 \times 3^2} = \dfrac{5}{18}$

3. En observant les décompositions en facteurs premiers, on peut déterminer le plus petit facteur commun.
   Ici on a $69 = 3 \times 23$ et $1\ 150 = 2 \times 5^2 \times 23$.
   Donc le plus petit facteur commun s'écrit $p = 2 \times 3 \times 5^2 \times 23 = 3450$
   Donc les deux ampoules clignotent en même temps 3450 secondes plus tard, soit à 0 h 57 min 30 s.

4. Le nombre de marins doit diviser 69, 1 150 et 4 140.

   Seul le facteur 23 est commun aux trois décompositions.

   Il y a donc 23 marins.