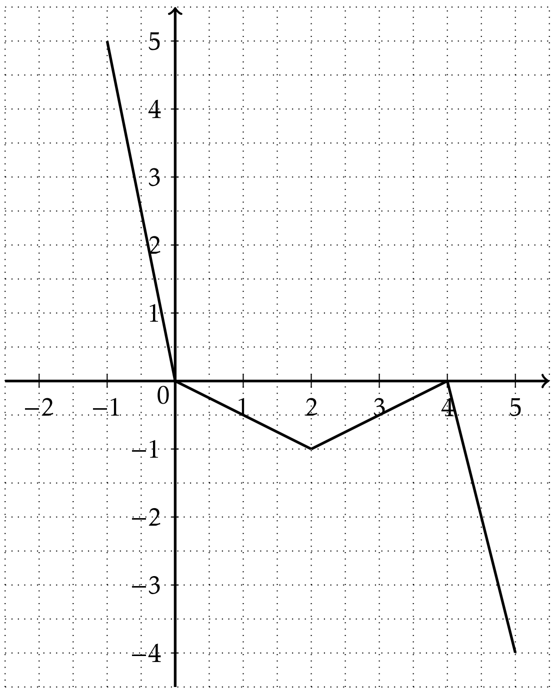
Entraînez-vous pendant les vacances en vous aidant du corrigé.

EXERCICE 1

On a tracé ci-dessous la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ d'une fonction f définie sur $[-1;5]$.



1. Dresser son tableau de variation.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 0$. Justifier par une phrase.
3. Déterminer graphiquement l'image de 2 par f.
4. Déterminer graphiquement les antécédents éventuels de $-0{,}5$ par f.
5. Tracer dans le même repère la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction affine g définie par $g(x) = \dfrac{8}{3}x - 4$.
6. Déterminer graphiquement les coordonnées du point d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.
7. Sur $[2;4]$, $(\mathscr{C}_f)$ est le segment de droite d'extrémités les points de coordonnées $(2;-1)$ et $(4;0)$. Déterminer l'expression de f sur $[2;4]$.

EXERCICE 2

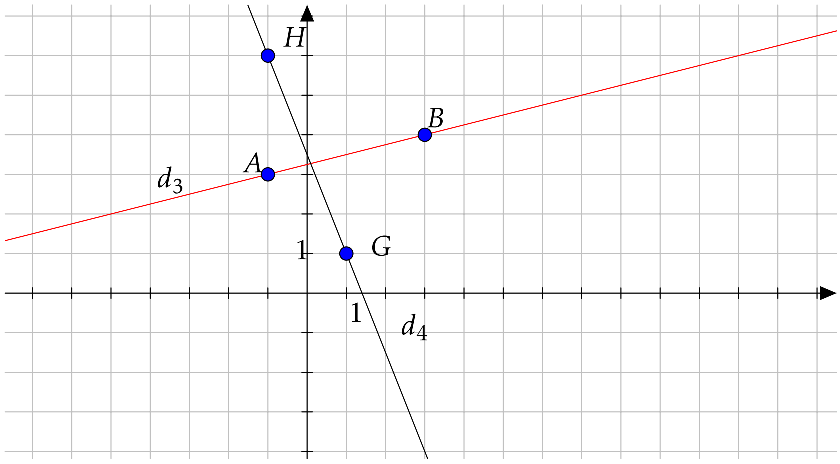
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Donner une équation cartésienne de la droite d de vecteur directeur $\vec{u}(7;-2)$ et qui passe par le point $A\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.
2. Déterminer un vecteur directeur et la pente de chaque droite dont une équation est donnée :

   (a) $d_1 : \quad 3x + 2y + 5 = 0$

   (b) $d_2 : \quad y = 5x - 1$
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ qui passe par le point $T(1;-4)$ et qui est parallèle à la droite $\Delta_1 : \quad x - 4y - 1 = 0$.

4. Déterminer graphiquement un vecteur directeur et la pente de chaque droite tracée dans un repère orthonormé.



5. On considère les points $C(-3;-4)$, $D(5;6)$, $E(1;1)$ et $F(-2;-3)$.

   (a) Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points C et D.

   (b) Les points E et F appartiennent-ils à la droite (CD) ? Justifier par un calcul.

   (c) On souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, si un point donné appartient à la droite (CD). Pour cela, on considère la fonction ci-dessous écrite en Python :

```
1 def test(x,y):
2     if ···==··· :
3         print ( " le point est sur (CD) ")
4     else :
5         print( " ··· " )
```

   Recopier et compléter les lignes 2 et 5.

   (d) Programmer l'algorithme et indiquer, parmi les points proposés, ceux qui appartient à la droite (CD) : $P(-30;-45{,}5)$; $Q(40{,}2;50)$ et $R(80{,}3;101)$

6. Utiliser un déterminant pour étudier les positions relatives des deux droites.

   $d_1 : \quad 2x - 5y + 2 = 0$ $\qquad\qquad$ $d_2 : \quad -x + 3y + 3 = 0$

EXERCICE 3

Dans une ferme, il y a des poules et des lapins. On compte 49 têtes et 132 pattes.
Combien y a-t-il de poules ? de lapins ?

EXERCICE 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 7x + 12$.
On nomme $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère.

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+3)(x+4)$.

   Après avoir choisi l'expression la plus adaptée de $f(x)$, répondre aux questions suivantes :

2. Calculer l'image de -3, de 0 et $\sqrt{7}$ par f.

3. Résoudre les équations suivantes : $\qquad f(x) = 0 \qquad f(x) = 12$.

4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.

5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ avec l'axe des ordonnées.

6. Déterminer les antécédents éventuels de 12 par f.
7. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ avec la droite d'équation $x = \sqrt{7}$.
8. Résoudre à l'aide d'un tableau de signes l'inéquation $f(x) < 0$.

EXERCICE 5

1. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $3x^2 - 8x = 0$ (b) $(2-3x)(3-x)-(4x+1)(2-3x) = 0$ (c) $(x-1)^2 - 49 = 0$
   (d) $(2x-3)^2 = (1-5x)^2$ (e) $(1-2x)^2 = 5$ (f) $\dfrac{1+3x}{4-5x} = -4$
2. Résoudre les inéquations suivantes :
   (a) $1-5x < 2x+4$ (b) $(6x-1)(1-7x) < 0$ (c) $(1-3x)(1-2x) \leqslant 0$ (d) $\dfrac{5x-1}{3x-5} > 0$ (e) $\dfrac{2}{5-4x} - 3 \geqslant 0$

EXERCICE 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm.
On considère les points $A(-2;2)$;$B(4;4)$;$C(6;-2)$ et $D(0;-4)$.

1. Démontrer que les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.
2. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?
3. Calculer les longueurs AB et AD. On admet que $BD = 4\sqrt{5}$. Quelle est la nature du triangle ABD ?
4. En déduire la nature exacte du quadrilatère $ABCD$.
5. Trouver les coordonnées du point K symétrique du point C par rapport au point A.
6. Montrer que le cercle circonscrit $\mathscr{C}$ au triangle ABD a pour centre le point J de coordonnées $(2;0)$ et de rayon $2\sqrt{5}$.
7. Le point $L(1;5)$ appartient-il au cercle $\mathscr{C}$? Justifier.
8. (**Question difficile**) Soit $M(x;y)$ un point du plan. Montrer que pour tout point M appartenant au cercle $\mathscr{C}$, on a : $(x-2)^2 + y^2 = 20$
9. (**Question difficile**) Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.

EXERCICE 7

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-3;-3)$,$B(3;-1)$,$C(2;2)$ et $D(-4;0)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Construire le point G tel que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DA} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
3. (a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   (b) Calculer la distance AB.
   (c) Calculer les coordonnées du point K milieu de $[AB]$.
4. (a) Démontrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
   (b) Le triangle ABD est-il un triangle rectangle ?
   (c) De quelle nature est le quadrilatère $ABCD$? Démontrer-le.

5. (a) Déterminer l'équation de la droite (AC).
   (b) Vérifier que (DK) admet pour équation $y = -\frac{1}{2}x - 2$.
   (c) Déterminer les coordonnées de E, point d'intersection des droites (DK) et (AC).
6. L est le milieu de $[AD]$. Démontrer que L,E et B sont alignés.

EXERCICE 8

1. Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans utiliser la calculatrice :

   (a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ et $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ (b) $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4{,}35}$ (c) $\sqrt{\pi}$ et $\sqrt{3{,}14}$

   (d) $-\frac{1}{0{,}01}$ et $-\frac{1}{0{,}001}$ (e) $\sqrt{6}$ et 3 (f) $(-3{,}2)^2$ et $(-4{,}6)^2$

2. Compléter à l'aide des intervalles.
   (a) Si $x \in]-\infty\ ;\ -2]$ alors $x^2 \in$ ....
   (b) Si $x \in]-1\ ;\ 3[$ alors $x^3 \in$ ....
   (c) Si $x \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{2}{3}\right]$ alors $\frac{1}{x} \in$ ....
   (d) Si $x \in \left[0\ ;\ \frac{4}{25}\right]$ alors $\sqrt{x} \in$ ....
3. En s'aidant de la représentation graphique des fonctions de référence, résoudre les inéquations suivantes :
   (a) $x^2 \leq 6$
   (b) $-2 \leq \frac{1}{x} \leq -1$
   (c) $\sqrt{x} > 4$
   (d) $-1 < x^3 < 0{,}125$

EXERCICE 9

Pour se rendre en vacances, Yanis doit effectuer un trajet de 400 *km*.
On désigne par v sa vitesse moyenne (en *km/h*) et par t le temps (en heure) pour réaliser ce trajet.

1. (a) Exprimer v en fonction de t.
   (b) Donner le meilleur encadrement possible de v lorsque $t \in [2{,}5\ ;\ 5]$.
2. (a) Exprimer maintenant t en fonction de v.
   (b) Yanis estime que s'il emprunte le réseau autoroutier, sa vitesse moyenne sera comprise entre 100 et 120 *km/h*. Donner alors un encadrement de son temps de trajet en heure et en minute.
   (c) Yanis estime que s'il emprunte le réseau des routes nationales, sa vitesse moyenne sera alors comprise entre 60 et 80 *km/h*. Donner alors un encadrement de son temps de trajet en heure et en minute.

EXERCICE 10

La période T (en seconde) d'un pendule simple, c'est-à-dire la durée d'une oscillation de celui-ci, peut être exprimée en fonction de sa longueur l (en mètre) par : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. On donne $g = 9{,}81\ m/s^2$.

1. Calculer la période T d'un pendule de longueur 5 *m*, en arrondissant à 0,1 *s*.
2. Calculer la longueur l d'un pendule dont la période vaut 10 *s*. Arrondir à 1 *cm*.

(a) Deux pendules A et B ont pour longueurs respectives 5 m et 10 m. Comparer leurs périodes.

(b) D'une façon générale, un pendule A a une longueur inférieure à celle d'un pendule B. Quel pendule a la période la plus grande ?Justifier.

EXERCICE 11

On considère la fonction ci-dessous écrite en Python :

```
def loyer(N):
    L=600
    for i in range(N):
        L=1.02*L
    return(L)
```

1. On choisit N=3. Compléter le tableau d'étapes ci-dessous et donner la valeur renvoyée par la fonction.

Étapes :	L
Initialisation	
$i = 0$	

Valeur renvoyée : ....

2. On étudie l'évolution du loyer mensuel d'un appartement. Chaque année, ce loyer subit une augmentation.

   La fonction `loyer()` précédente prend en paramètre un entier naturel N non nul et renvoie le loyer, en euros, après N années.

   Quel est le loyer mensuel au début de l'étude ?

   Quel est le pourcentage d'augmentation annuel du loyer ?

3. Écrire une fonction `seuil()` qui détermine au bout de combien d'années le loyer mensuel dépassera la somme de 700 € ?