EXERCICE 1

1. Tableau de variations :

x	-1		2		4		5
Variations de f	5	↘	-1	↗	0	↘	-4

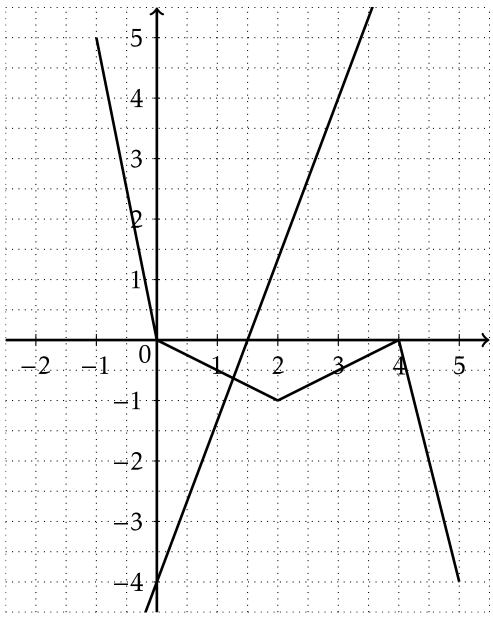
2. Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ sont les abscisses des points de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ situés strictement en dessous de l'axe des abscisses. $S =]0;4[\cup]4;5]$.

3. $f(2) = -1$.

4. Les antécédents de $-0{,}5$ par f sont 1 et 3.

5. g est une fonction affine donc $(\mathscr{C}_g)$ est une droite. Pour la tracer, on utilise le tableau de valeurs suivant :

x	0	3
$g(x)$	-4	4



6. Graphiquement les coordonnées du point d'intersection de la représentation graphique de f et de g sont approximativement (1,3 ; −0,6).

7. On cherche deux réels a et b tels que pour tout $x \in [2;4]$, $f(x) = ax + b$.

$a = \dfrac{f(4) - f(2)}{4-2} = \dfrac{0-(-1)}{4-2} = \dfrac{1}{2}$

$f(4) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \times 4 + b = 0 \Leftrightarrow b = -2$

Donc, pour tout $x \in [2;4]$, $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 2$

EXERCICE 2

1. $-3x_A+1=-5+1=-6\neq y_A$ donc A n'appartient pas à Δ.

   $-3x_B+1=-\dfrac{3}{7}+\dfrac{7}{7}=\dfrac{4}{7}=y_B$ donc B appartient à Δ.

2. Comme $x_C\neq x_D$ alors, je calcule le coefficient directeur $m=\dfrac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\dfrac{6+12}{24+3}=\dfrac{18}{27}=\dfrac{2}{3}$.

   Donc (CD) a pour équation $y=\dfrac{2}{3}x+p$ avec $p\in\mathbb{R}$.

   Or $D\in(CD)$ donc $6=\dfrac{2}{3}\times 24+p\Leftrightarrow p=-10$.

   Donc (CD) a pour équation $y=\dfrac{2}{3}x-10$.

3. Comme Δ et (CD) n'ont pas le même coefficient directeur $\left(-3\neq\dfrac{2}{3}\right)$ alors elles sont sécantes en un point Z.

   Pour déterminer les coordonnées de Z, je résous le système :

   $$\left\{\begin{array}{l} y=-3x+1\\ y=\dfrac{2}{3}x-10\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=-3x+1\\ -3x+1=\dfrac{2}{3}x-10\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=-3x+1\\ 11=\dfrac{11}{3}x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=-8\\ x=3\end{array}\right.$$

   Donc Z a pour coordonnées $(3;-8)$.

EXERCICE 3

On pose x le nombres de poules et y le nombres de lapins. On résout le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=49\\ 2x+4y=132\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x+y=49\\ -x-2y=-66\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x+y=49\\ -y=-17\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=32\\ y=17\end{array}\right.$$

Il y a 32 poules et 17 lapins dans cette ferme.

EXERCICE 4

1. $f(-3)=(-3+3)(-3+4)=0$

   $f(0)=0^2+7\times 0+12=12$

   $f\left(-\dfrac{7}{2}\right)=\left(-\dfrac{7}{2}+\dfrac{7}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$

   $f\left(\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{7}\right)^2+7\sqrt{7}+12=7\sqrt{7}+19$

2. Dans $\mathbb{R}$: $f(x)=0$ (*)

   (*) $\Leftrightarrow (x+3)(x+4)=0$ Or $A\times B=0\Leftrightarrow A=0$ ou $B=0$

   (*) $\Leftrightarrow x+3=0$ ou $x+4=0$

   (*) $\Leftrightarrow x=-3$ ou $x=-4$

   $S=\{-4\ ;\ -3\}$

   Dans $\mathbb{R}$: $f(x)=12$ (*)

   (*) $\Leftrightarrow x^2+7x+12=12$

   (*) $\Leftrightarrow x^2+7x=0$

   (*) $\Leftrightarrow x(x+7)=0$

   (*) $\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-7$

   $S=\{-7\ ;\ 0\}$

   Dans $\mathbb{R}$: $f(x)=-\dfrac{1}{4}$ (*)

   (*) $\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{7}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$

$(*) \Leftrightarrow \left(x+\frac{7}{2}\right)^2 = 0$

$(*) \Leftrightarrow x+\frac{7}{2} = 0$

$(*) \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$

$S = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$

3. On utilise la forme canonique de $f(x)$: $f(x) = a(x-m)^2+n$ avec $a = 1$, $m = -\frac{7}{2}$ et $n = -\frac{1}{4}$. Comme $a > 0$, on a la tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$

4. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = -4$
   Donc les points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $(-4\ ;\ 0)$ et $(-3\ ;\ 0)$.

5. $f(0) = 12$
   Donc le point d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0\ ;\ 12)$.

6. $f(x) = 12 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -7$
   Donc les antécédents de 12 par f sont -7 et 0.

7. $f\left(\sqrt{7}\right) = 7\sqrt{7}+19$
   Donc le point d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ avec la droite d'équation $x = \sqrt{7}$ a pour coordonnées $\left(\sqrt{7}\ ;\ 7\sqrt{7}+19\right)$

8. On résout l'inéquation $f(x) < 0$ à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		-3		$+\infty$
Signe de $x+3$		$-$ (signe de $-a$)		$-$ (signe de $-a$)	0	$+$ (signe de $a = 1$)	
Signe de $x+4$		$-$ (signe de $-a$)	0	$+$ (signe de a)		$+$ (signe de $a = 1$)	
Signe de $(x+3)(x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-4\ ;\ -3[$

EXERCICE 5

1. (a) Dans $\mathbb{R}$: $3x^2 - 8x = 0$ (*)
   $(*) \Leftrightarrow x(3x-8) = 0$
   $(*) \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{8}{3}$
   $S = \left\{0; \frac{8}{3}\right\}$

(b) Dans $\mathbb{R}$: $(2-3x)(3-x)-(4x+1)(2-3x)=0$ (*)
$(*) \Leftrightarrow (2-3x)[(3-x)-(4x+1)]=0$
$(*) \Leftrightarrow (2-3x)(-5x+2)=0$
$(*) \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$ ou $x=\dfrac{2}{5}$
$S=\left\{\dfrac{2}{5};\dfrac{2}{3}\right\}$

(c) Dans $\mathbb{R}$: $(x-1)^2-49=0$ (*)
$(*) \Leftrightarrow (x-1)^2-7^2=0$
$(*) \Leftrightarrow (x-1-7)(x-1+7)=0$
$(*) \Leftrightarrow (x-8)(x+6)=0$
$(*) \Leftrightarrow x=8$ ou $x=-6$.
$S=\{-6;8\}$

(d) Dans $\mathbb{R}$: $(2x-3)^2=(1-5x)^2$ (*)
$(*) \Leftrightarrow (2x-3)^2-(1-5x)^2=0$
$(*) \Leftrightarrow (2x-3-1+5x)(2x-3+1-5x)=0$
$(*) \Leftrightarrow (7x-4)(-3x-2)=0$
$(*) \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{7}$ ou $x=-\dfrac{2}{3}$
$S=\left\{-\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{7}\right\}$

(e) Dans $\mathbb{R}$: $(1-2x)^2=5$ (*)
$(*) \Leftrightarrow (1-2x)^2-(\sqrt{5})^2=0$
$(*) \Leftrightarrow (1-2x-\sqrt{5})(1-2x+\sqrt{5})=0$
$(*) \Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
$S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

(f) $4-5x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{5}$. La valeur interdite est $\dfrac{4}{5}$.
Dans $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{4}{5}\right\}$: $\dfrac{1+3x}{4-5x}=-4$ (*)
$(*) \Leftrightarrow \dfrac{1+3x}{4-5x}+4=0$
$(*) \Leftrightarrow \dfrac{1+3x+16-20x}{4-5x}=0$
$(*) \Leftrightarrow \dfrac{17-17x}{4-5x}=0$
$(*) \Leftrightarrow 17-17x=0$
$(*) \Leftrightarrow x=1$
$S=\{1\}$

2. (a) Dans $\mathbb{R}$: $1-5x<2x+4$ (*)
$(*) \Leftrightarrow -7x<3$
$(*) \Leftrightarrow x>-\dfrac{3}{7}$
$S=\left]-\dfrac{3}{7}+\infty\right[$

(b) Dans $\mathbb{R}$: $6x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{6}$ et $1-7x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{7}$
On utilise un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
Signe de $6x-1$		$-$ (signe de $-a$)		$-$ (signe de $-a$)	0	$+$ (signe de $a=6$)	
Signe de $1-7x$		$+$ (signe de $-a$)	0	$-$ (signe de a)		$-$ (signe de $a=-7$)	
Signe de $(6x-1)(1-7x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S=\left]-\infty;\frac{1}{7}\right[\cup\left]\frac{1}{6};+\infty\right[$

(c) Dans $\mathbb{R}$: $1-3x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ et $1-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

On utilise un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $1-3x$		$+$ (signe de $-a$)	0	$-$ (signe de a)	0	$-$ (signe de $a=-3$)	
Signe de $1-2xx$		$+$ (signe de $-a$)		$+$ (signe de $-a$)	0	$-$ (signe de $a=-2$)	
Signe de $(1-3x)(1-2x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$

(d) $3x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$ donc $\frac{5}{3}$ est valeur interdite.

Dans $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{5}{3}\right\}$: $5x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$ et

On utilise un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
Signe de $5x-1$		$-$ (signe de $-a$)	0	$+$ (signe de a)		$+$ (signe de $a=5$)	
Signe de $3x-5$		$-$ (signe de $-a$)		$-$ (signe de $-a$)	0	$+$ (signe de $a=3$)	
Signe de $\frac{5x-1}{3x-5}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$S=\left]-\infty;\frac{1}{5}\right[\cup\left]\frac{5}{3};+\infty\right[$

(e) $5-4x=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$ donc $\frac{5}{4}$ est valeur interdite.

Dans $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{5}{4}\right\}$: $\frac{2}{5-4x}-3<0 \Leftrightarrow \frac{2-3(5-4x)}{5-4x}<0 \Leftrightarrow \frac{12x-13}{5-4x}<0.$

Dans $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{5}{4}\right\}$: $12x-13=0 \Leftrightarrow x=\frac{13}{12}.$

On utilise un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{13}{12}$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
Signe de $12x-13$		$-$ (signe de $-a$)	0	$+$ (signe de a)		$+$ (signe de $a=12$)	
Signe de $5-4x$		$+$ (signe de $-a$)		$+$ (signe de $-a$)	0	$-$ (signe de $a=-4$)	
Signe de $\dfrac{12x-13}{5-4x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

$S=\left[\frac{13}{12};\frac{5}{4}\right[$.

EXERCICE 6

1. Les coordonnées du milieu de $[AC]$ sont $\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)=(2;0)$

   Les coordonnées du milieu de $[BD]$ sont $\left(\frac{x_B+x_D}{2};\frac{y_B+y_D}{2}\right)=(2;0)$.

   Donc les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.

2. Comme les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ ont même milieu alors $ABCD$ est un parallélogramme.

3. $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

   $AD=\sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

   On a $AB=AD$ donc le triangle ABD est isocèle en A.

   D'une part, $AB^2+AD^2=80$ et d'autre part, $BD^2=80$ donc $BD^2=AB^2+AD^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en A.

4. $ABCD$ est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur donc $ABCD$ est un losange.

   $ABCD$ est un parallélogramme ayant un angle droit donc $ABCD$ est un rectangle.

   $ABCD$ est un rectangle et un losange donc $ABCD$ est un carré.

5. K est symétrique du point C par rapport au point A (*)

   (*) $\Leftrightarrow$ A est le milieu du segment $[CK]$

   (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A=\dfrac{x_C+x_K}{2} \\ y_A=\dfrac{y_C+y_K}{2}\end{cases}$

   (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_K=2x_A-x_C \\ y_K=2y_A-y_C\end{cases}$

   (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_K=-10 \\ y_K=6\end{cases}$

   Donc K a pour coordonnées $(-10;6)$.

6. $JA=\sqrt{(-2-2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

   $JB=\sqrt{(4-2)^2+(4-0)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

   $JD=\sqrt{(0-2)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

   On a $JA=JB=JD=2\sqrt{5}$ donc les points A, B et D appartiennent tous au cercle $\mathscr{C}$ de centre J et de rayon $2\sqrt{5}$ qui est donc le cercle circonscrit au triangle ABD.

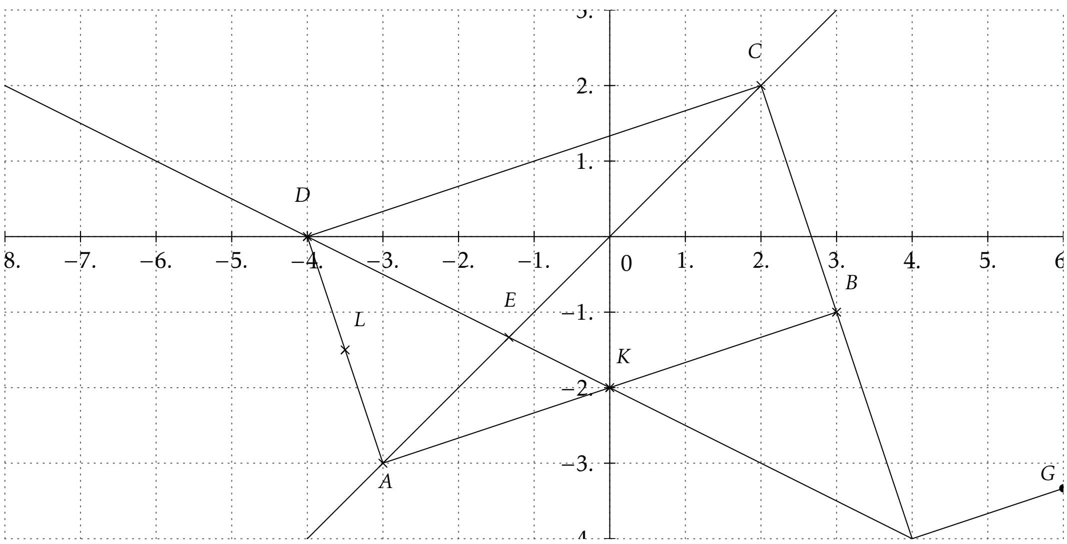
7. $JL = \sqrt{(1-2)^2+(5-0)^2} = \sqrt{26}$ donc $JL \neq 2\sqrt{5}$ donc le point L n'appartient pas au cercle $\mathscr{C}$.

8. $M(x;y) \in \mathscr{C}$ (*)
   (*) $\Leftrightarrow JM = 2\sqrt{5}$
   (*) $\Leftrightarrow JM^2 = (2\sqrt{5})^2$ car $JM > 0$ et $2\sqrt{5} > 0$
   (*) $\Leftrightarrow JM^2 = 20$
   (*) $\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 20$
   Donc pour tout point M de coordonnées $(x;y)$ appartenant au cercle $\mathscr{C}$, on a : $(x-2)^2+y^2 = 20$

9. On résout le système :
   $$\begin{cases} (x-2)^2+y^2 = 20 \\ x = 0 \end{cases} \quad (*)$$
   $$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 4+y^2 = 20 \\ x = 0 \end{cases}$$
   $$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 16 \\ x = 0 \end{cases}$$
   $$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -4 \\ x = 0 \end{cases}$$
   Les coordonnées des deux points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées sont $(0;-4)$ et $(0;4)$.

EXERCICE 7

1. Figure :



2. (a) $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - x_A \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$
   (b) $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.
   (c) $x_K = \dfrac{x_A+x_B}{2} = 0$ et $y_K = \dfrac{y_A+y_B}{2} = -2$ donc K a pour coordonnées $(0;-2)$.

3. (a) $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont les mêmes coordonnées donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

(b) $AB^2 = 40$, $AD^2 = 10$ et $BD^2 = 50$. On a $BD^2 = AB^2 + AD^2$ donc le triangle ABD est rectangle en A.

(c) Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
Comme le triangle ABD est rectangle en A alors $ABCD$ est un parallélogramme ayant un angle droit donc $ABCD$ est un rectangle.

4. (a) $x_A \neq x_C$ donc on peut calculer le coefficient directeur de la droite (AC) : $m = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = 1$.
Donc (AC) a une équation de la forme $y = x + p$ avec $p \in \mathbb{R}$.
Or $A \in (AC)$ donc $y_A = x_A + p \Leftrightarrow -3 = -3 + p \Leftrightarrow p = 0$
Donc la droite (AC) a pour équation $y = x$.

(b) Pour vérifier que la droite (DK) admet pour équation $y = -\dfrac{1}{2}x - 2$, il suffit de vérifier que les coordonnées des points D et K sont solutions de l'équation $y = -\dfrac{1}{2}x - 2$
Or $-\dfrac{1}{2}x_D - 2 = 2 - 2 = y_D$ et $-\dfrac{1}{2}x_K - 2 = 0 - 2 = y_K$.
Donc la droite (DK) admet pour équation $y = -\dfrac{1}{2}x - 2$.

(c) Comme les droites (DK) et (AC) n'ont pas le même coefficient directeur $\left(1 \neq \dfrac{1}{2}\right)$ alors elles sont sécantes en un point E.
Pour trouver les coordonnées de E, on résout le système :

$$\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{1}{2}x - 2 \end{cases} \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = -\dfrac{1}{2}x - 2 \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \dfrac{3}{2}x = -2 \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{4}{3} \\ x = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Les coordonnées de E sont $\left(-\dfrac{4}{3} ; -\dfrac{4}{3}\right)$.

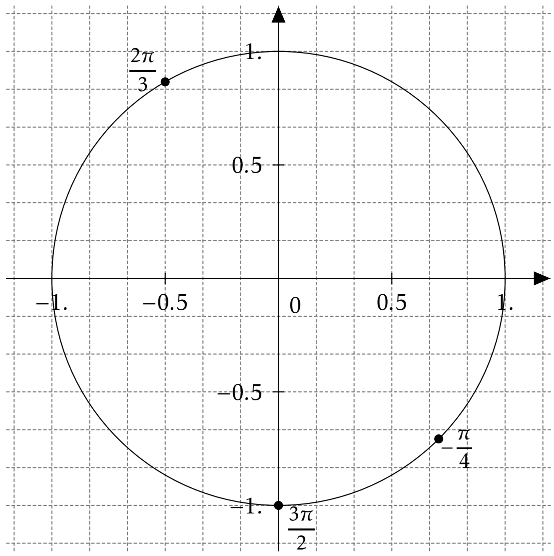
5. L a pour coordonnées $\left(-\dfrac{7}{2} ; -\dfrac{3}{2}\right)$.

$\overrightarrow{BE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\dfrac{13}{3} \\ -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BL}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\dfrac{13}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{BL} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BE}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires donc les points L,E et B sont alignés.

EXERCICE 8

1. Figure :



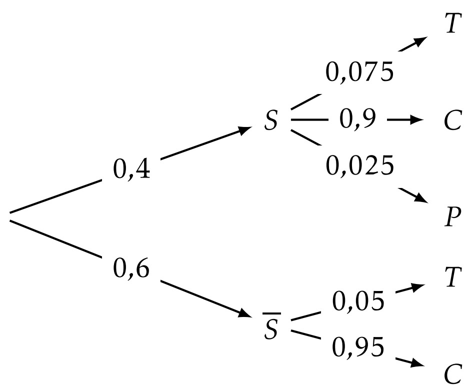
2. $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1$

EXERCICE 9

1. Arbre :



2. (a) $P(S \cap C) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$
   La probabilité de prendre au hasard un flacon de shampooing qui soit correctement rempli est 0,36.

   (b) $P(\overline{S} \cap T) = 0,6 \times 0,05 = 0,03$
   La probabilité de prendre au hasard un flacon de gel douche qui soit trop rempli est 0,03.

   (c) $P(T) = P(S \cap T) + P(\overline{S} \cap T) = 0,4 \times 0,075 + 0,03 = 0,06$
   La probabilité de prendre au hasard un flacon qui soit trop rempli.

3. $P(P) = P(S \cap P) = 0,4 \times 0,025 = 0,01$

   On a $P(P) < 0,02$ donc il y a effectivement moins de 2 % de chances de choisir un flacon qui ne soit pas assez rempli.

EXERCICE 10

1. On choisit N=3.

Étapes :	L
Initialisation	600
$i=0$	612
$i=1$	624,24
$i=2$	636,7248

Valeur renvoyée : 636,7248

2. Au début de l'étude, le loyer mensuel est de 600 €.

   Chaque année, le loyer augmente de 2 %.

3.
```
def seuil():
    L=600
    N=0
    while L<=700:
        L=1.02*L
        N=N+1
    return(N)
```