Entrée en 1$^{\text{e}}$ année de CPGE : exercices à chercher pour la rentrée

1 Calculs algébriques

Dans les calculs ci-dessous, effectuer les opérations avec les fractions les plus simples possibles et exprimer les résultats sous forme de fraction avec un dénominateur entier lorsque cela est possible.

Exemple : $\dfrac{1}{48} - \dfrac{1}{80}$ ne se fera pas avec la calculatrice ni sous la forme $\dfrac{80-48}{48\times 80}$.
Puisque 48 et 80 ont un multiple commun bien plus petit que leur produit :

$$\frac{1}{6\times 8} - \frac{1}{8\times 10} = \frac{5-3}{8\times 3\times 2\times 5} = \frac{1}{120}$$

Vous présenterez les calculs intermédiaires sur votre copie.

Calcul 1 : Simplifier $A = \dfrac{1}{120} + \dfrac{1}{45} + \dfrac{3}{20} + \dfrac{1}{36}$.

Calcul 2 : Lors des calculs de probabilités conditionnelles, on peut être amené à calculer une expression de la forme

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + \cdots + P(B|A_3)P(A_3)}.$$

Nous vous proposons deux exemples de calculs apparaissant en probabilités.

Simplifier : $p = \dfrac{\dfrac{4}{10}\times\dfrac{1}{50}}{\dfrac{4}{10}\times\dfrac{1}{50} + \dfrac{2}{3}\times\dfrac{15}{50} + \dfrac{1}{3}\times\dfrac{34}{50}}$

Simplifier : $q = \dfrac{\dfrac{2}{10}\times\dfrac{4}{10} + \dfrac{3}{10}\times\dfrac{5}{10} + \dfrac{1}{100}}{\dfrac{2}{10}\times\dfrac{4}{10} + \dfrac{3}{10}\times\dfrac{5}{10} + \dfrac{1}{100} + \dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{10}}$

Calcul 3 : Simplifier les fractions suivantes, sachant que a, b, c, d désignent des réels non nuls :

$$\frac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{\left(\dfrac{c}{d}\right)} \quad ; \quad \frac{a}{\left(\dfrac{b}{c}\right)} \quad ; \quad \frac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{c}$$

Calcul 4 : Fractions de nombres non entiers. Simplifier :

$$A = \frac{1}{u^2+3u+2} + \frac{1}{u^2-1} + \frac{-2}{u^2+u} - \frac{1}{u^2+u-2}$$

$$B = \frac{2(x-1)}{9x^2-4} - \frac{2-x}{9x^2+12x+4} + \frac{x+4}{9x^2-4}$$

Calcul 5 : Racines et expressions conjuguées. Écrire avec un dénominateur **entier**.

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} \quad ; \quad \frac{1-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2} \quad ; \quad \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} + \frac{3\sqrt{5}+1}{2-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+2}$$

Calcul 6 : Exprimer avec encore un dénominateur entier (i désigne l'imaginaire pur de carré égal à -1).

$$\frac{1+i}{i} \quad ; \quad \frac{i-4}{2i} \quad ; \quad \frac{3+4i}{5-7i} \quad ; \quad \frac{4-3i}{i-1} \quad ; \quad \frac{5-3i}{(4-i)(1+3i)}$$

$$\frac{(5+2i)(2-3i)}{(i-3)(3i-4)} \quad ; \quad \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + 2\,\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}} - \frac{(1-i)^3}{\sqrt{3}+i}$$

Calcul 7 : Trouver les parties réelle et imaginaire, toujours avec dénominateur entier ! On utilisera le module et l'argument.

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \quad ; \quad z_2 = \frac{i}{2i\sqrt{3}-2} \quad ; \quad z_1 + z_2$$

$$z_1 z_2 \quad ; \quad z_1(z_2)^{-1} \quad ; \quad (z_1)^6(z_2)^{12} \quad ; \quad (z_1)^8(z_2)^{-3} \quad ; \quad \frac{(1+i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4}$$

Calcul 8 : Simplifier les expressions ci-dessous sachant que a, x, y, z désignent des réels et que a est strictement positif.

$$\frac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^5\left(\dfrac{6}{5}\right)^{4+y}}{\left(\dfrac{9}{10}\right)^7\left(\dfrac{2}{15}\right)^{2y-3}} \quad ; \quad \frac{a^{x+y}e^{(x-y)\ln(a)}}{a^2a^{(-2x-4)}} \quad ; \quad \frac{6^{x-2}3^{2x+2}}{12^{2x-1}} \quad ; \quad \frac{30^{3-x}}{6^{2-x}5^{x+1}}$$

$$(-3)^{-2}\cdot 2^4 \quad ; \quad (-xy^2)\cdot(-yz^2)\cdot(-zx^2) \quad ; \quad \left(-\frac{x}{y}\right)^2\cdot(-y)^3$$

Calcul 9 :

1. A l'aide d'un développement, démontrer les formules suivantes :

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \quad \text{et} \quad (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

2. Simplifier les expressions suivantes :

$$\sqrt{\sqrt{3}}+2\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{243} \quad ; \quad \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

Calcul 10 : On rappelle le sens de la notation factorielle :

$$0!=1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad (n+1)!=n!\times(n+1)$$

On définit maintenant $u_n=\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Exprimer u_{n+1} puis simplifier le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ainsi que l'écart relatif $\left|\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}\right|$.

Calcul 11 : Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2+4z+8=0$.
Quelle est la somme des deux solutions ? où la trouve-t-on dans les coefficients de la fonction trinôme ?

Calcul 12 : … et avec un degré de plus.
Pour la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z)=z^3+[(i-1)+4]z^2+[8-4(1-i)]z+8(i-1)$, déterminer une factorisation de f et ses racines complexes. Où trouve-t-on la somme des trois racines ? le produit des trois racines ? que représente le dernier coefficient ?

Calcul 13 : Factoriser les trinômes suivants sans utiliser le discriminant :

$$x^2+3x \quad ; \quad x^2-9 \quad ; \quad 4x^2+25 \quad ; \quad 49x^2+21x+\frac{3}{2} \quad ; \quad x^2+5x+6$$

Pour le dernier, on donne l'indication suivante : les racines sont entières.

2 Calculs analytiques

Exercice 1 : Simplifier chacune des expressions suivantes :

$$A=\frac{e^3\times e^{-1}}{e^7} \quad ; \quad B=\frac{(e^{-2})^3\times e^{-5}}{(e^2)^2} \quad ; \quad C=\frac{1}{e^{0,3}}\times\frac{1}{e}$$

$$D=e^{\frac{1}{2}\ln(8)+1} \quad ; \quad E=\frac{e^{2\ln(3)}}{e^{3\ln(2)}} \quad ; \quad F=\ln\left(\frac{e^5}{e^3}\right) \quad ; \quad G=\ln(\sqrt{e})-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

Exercice 2 : Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

(a) $e^{3x+1}=e^x$ (b) $e^{x(x+1)}=1$ (c) $e^x=\dfrac{1}{e^{x+1}}$
(d) $e^{3x-1}\leqslant e^{2x}$ (e) $e^{2x}-e^{x+1}\leqslant 0$ (f) $e^{x^2}>e^{2x^2-x}$
(g) $e^{3x-1}=3$ (h) $e^{1/x}=2$ (i) $e^{2x}-2e^{-2x}=1$
(j) $\ln(1+3x)=\ln(x+1)$ (k) $\ln(x-1)+\ln(2-x)=\ln(6x)$
(l) $\ln(2x+1)=\ln(x^2-1)$

Indication : pour (i), on pourra poser $X=e^{2x}$.

Exercice 3 : Pour chacune des fonctions numériques réelles suivantes, donner son domaine de définition, préciser en quels points elle est dérivable et calculer sa dérivée en ces points :

(a) $x\mapsto x^3-x^2$ (b) $x\mapsto\dfrac{x^2-3}{x+1}$ (c) $x\mapsto xe^{-x}$
(d) $x\mapsto\sqrt{x^2+2x-1}$ (e) $x\mapsto\ln(x^2+x+1)$ (f) $x\mapsto\dfrac{(2x+1)^3}{x+1}$
(g) $x\mapsto e^x\sqrt{1-x}$ (h) $x\mapsto\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ (i) $x\mapsto e^{x^2-x}+\dfrac{3}{4}x^4$
(j) $x\mapsto e^{\omega x}-x$, où ω est un réel fixé.

Indication : utiliser la dérivée de fonctions des types suivants : $x\mapsto\sqrt{u(x)}$, $x\mapsto(u(x))^n$, $x\mapsto e^{u(x)}$ et $x\mapsto\ln(u(x))$, où n est un entier relatif non nul.

Exercice 4 : Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué :

(a) $I=\mathbb{R}$, $f:x\mapsto 2x$ (b) $I=\mathbb{R}$, $f:x\mapsto 6x^{11}-8x^3$
(c) $I=]0;+\infty[$, $f:x\mapsto 1-\dfrac{1}{x^2}$ (d) $I=]-\infty;2[$, $f:x\mapsto\dfrac{1}{x-2}$
(e) $I=]-\dfrac{3}{2};+\infty[$, $f:x\mapsto\dfrac{1}{(2x+3)^5}$ (f) $I=]1;+\infty[$, $f:x\mapsto\dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$

Exercice 5 : On suppose que f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et qu'il existe une fonction a continue sur I vérifiant $f'(t)=a(t)f(t)$ pour tout t dans I.

1. Rappeler pourquoi a admet au moins une primitive sur I. On note A une telle primitive.
2. Démontrer que $F:t\mapsto f(t)e^{-A(t)}$ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
3. En déduire qu'il existe un réel K tel que, pour tout réel t appartenant à I, $f(t)=Ke^{A(t)}$.
4. Application pratique : dans chacun des cas suivants, déterminer toutes les fonctions f vérifiant l'égalité proposée sur l'intervalle I indiqué :

   (a) $f'(t)=3f(t)$, $I=\mathbb{R}$ (b) $f'(t)=-\dfrac{1}{2}f(t)$, $I=[0,+\infty[$
   (c) $f'(t)=2tf(t)$, $I=\mathbb{R}$ (d) $f'(t)=\dfrac{1}{t}f(t)$, $I=[1,2]$
   (e) $f'(t)=-\dfrac{1}{t}f(t)$, $I=]-\infty,0[$

3 Trigonométrie

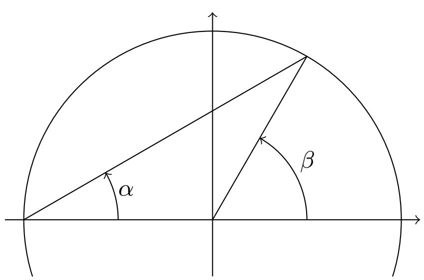
Exercice 6 : Dans cet exercice, on considère la fonction tan : $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, dite fonction tangente.

1. Déterminer son domaine de définition.
2. Rappeler les formules d'addition du cosinus et du sinus.
3. Soient a et b deux réels. Démontrer les formules ci-dessous :
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad \text{et} \quad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b},$$
en précisant pour quels réels a et b ces formules sont valables.
4. Tracer les graphes des fonctions sin et cos sur une même figure. Expliquer comment on interprète les formules suivantes sur les graphes des deux fonctions : pour tout réel x,
$$\sin(\pi - x) = \sin x \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad ; \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$
5. Résoudre l'équation suivante d'inconnue réelle x :
$$2\cos(2x) + 4\cos(x) + 3 = 0.$$

Exercice 7 : Expliquer les formules ci-dessous à l'aide du cercle trigonométrique :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \quad ; \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x \quad ; \quad \cos(x+\pi) = -\cos x$$
$$\cos\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = \sin x \quad ; \quad \tan(x+\pi) = \tan x \quad ; \quad \tan(-x) = -\tan x$$
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad ; \quad \cos(-x) = \cos x \quad ; \quad \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

On démontrera la dernière formule pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ après avoir remarqué que, dans la figure ci-contre, l'angle β est le double de l'angle α :



Exercice 8 : Soient a et b deux réels. On pose $u = \dfrac{a+b}{2}$ et $v = \dfrac{a-b}{2}$.

1. Calculer $u+v$ et $u-v$. En déduire les formules suivantes :
$$\begin{aligned}
\cos a + \cos b &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\\
\cos a - \cos b &= -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\\
\sin a + \sin b &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\\
\sin a - \sin b &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)
\end{aligned}$$
2. Montrer les formules suivantes :
$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}\big[\cos(a-b) + \cos(a+b)\big]\\
\sin a \sin b &= \frac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big]\\
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}\big[\sin(a-b) + \sin(a+b)\big]
\end{aligned}$$
3. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle :
$$(1)\ \sin(2x) + \sin(6x) = \sin(4x) \quad ; \quad (2)\ \cos(x)\cos(7x) = \cos(3x)\cos(5x)$$

Exercice 9 :

1. Grâce au cercle trigonométrique, préciser à quelle condition sur les réels x et y, on a :
$$(1)\ \cos x = \cos y \quad ; \quad (2)\ \sin x = \sin y.$$
2. Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle θ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :
$$(1)\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(3\theta) \quad ; \quad (2)\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(3\theta)$$

Exercice 10 : Utilisation de nombres complexes en trigonométrie. Dans cet exercice, on fixe deux réels non nuls a et b.

1. Pour tout réel θ, montrer que : $\quad a\cos\theta + b\sin\theta = \mathrm{Re}\left[(a-ib)e^{i\theta}\right]$.
2. Soit $z = a+ib$, r le module de z et φ un argument de z. Montrer que, pour tout réel θ, on a :
$$a\cos\theta + b\sin\theta = r\cos(\theta - \varphi).$$
3. Utiliser cette transformation pour déterminer tous les réels x de l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ tels que $\quad \cos x - \sqrt{3}\sin x \leqslant 1$.